SEPUTAR MODUL AUTO INVARIAN

Dewa Putu Wiadnyana Putra
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma
Alamat Korespondensi: Kampus III, Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
Email: *dewa@usd.ac.id*

ABSTRACT

A module M is called auto invariant module if M is invariant under any automorphism of its injective envelope, i.e $\sigma(M) \subseteq E(M)$ *for every* $\sigma \in \mathrm{Aut}_R(E(M))$*. Based on definition, for any pseudo-injective module is auto invariant module. Module M is auto invariant module if and only if for any isomorphism between two essential submodules of M extends to automorphism of M. In this article is discussed about some properties of auto invariant modules such as submodules and decomposition of auto invariant module. The main result are auto invariant modules are coincide with pseudo-injective module and find out sufficient condition of auto invariant modules are quasi-injective modules.*

Keywords : *injective modules, auto invariant modules, essential submodules.*

1. PENDAHULUAN

Pada keseluruhan tulisan ini, ring *R* adalah ring dengan elemen satuan dan modul adalah modul *M* kanan atas *R*. Sifat-sifat modul pseudo-injektif telah banyak dikaji oleh Dihn [2] yang merupakan perumuman dari modul injektif. Selanjutnya Lee dan Zhou [6], Noyan, Srivastava, dan Singh [7] memperkenalkan suatu jenis modul yang merupakan perumuman dari modul pseudo-injektif yaitu modul yang invarian terhadap automorfisma.

Modul *M* dikatakan injektif relatif terhadap modul *N* (*M N*-injektif) jika untuk setiap barisan eksak $0 \to K \xrightarrow{\varphi} N$ dan setiap homomorfisma $f : K \to M$ terdapat homomorfisma $g : N \to M$ sedemikian sehingga $f = g\varphi$. Selanjutnya, modul *M* dikatakan modul injektif jika *M N*-injektif untuk setiap modul *N*. Submodul *N* di *M* dikatakan submodul esensial ($N \leqslant_e M$) jika untuk setiap submodul taknol *L* di *M* berlaku $N \cap M \neq 0$. Sedangkan modul *M* dikatakan perluasan esensial dari *N*. Untuk setiap modul *M*, terdapat modul injektif *Q* yang memuat *M*. Jika modul *Q* sekaligus merupakan perluasan esensial dari *M* maka modul *Q* dikatakan amplop injektif (*injective envelope)* dari modul *M* (*E*(*M*)=*Q)* [4].

Modul *M* atas ring *R* dikatakan modul quasi-injektif jika *M* invarian terhadap endomorfisma pada *E*(*M*), yaitu $\sigma(M) \subseteq M$ untuk setiap $\sigma \in End_R(M)$ [5]. Selanjutnya, Dihn [2] menyatakan bahwa modul pseudo-injektif merupakan modul yang invarian terhadap setiap monomorfisma pada amplop injektif modul tersebut. Oleh karena itu, Singh [8] mendefinisikan modul *M* yang invarian terhadap automorfisma, yaitu $\sigma(M) \subseteq M$ untuk setiap $\sigma \in Aut_R(M)$ yang selanjutnya dalam tulisan ini disebut dengan modul auto invarian. Berdasarkan pemaparan di atas diperoleh hubungan implikasi sebagai berikut.

injektif $\Rightarrow$ quasi-injektif $\Rightarrow$ pseudo-injketif $\Rightarrow$ auto invarian.

Dalam tulisan ini akan dibahas karakterisasi modul auto invarian, sifat-sifat dasar yang meliputi submodul, dan dekomposisi modul auto invarian serta hubungan modul pseudo-injektif dengan modul auto invarian. Syarat cukup modul auto invariant agar merupakan modul quasi injektif akan diberikan pada bagian akhir tulisan ini.

2. MODUL AUTO INVARIAN

Submodul *A* dikatakan tertutup secara esensial di *M* jika *A* tidak mempunyai perluasan esensial sejati di *M*. Untuk submodul *A* dan *B* di *M*, submodul *B* dikatakan komplemen dari *A* jika *B* submodul maksimal dengan sifat $A \cap B = 0$. Monomorfisma modul $f:M \to N$ dikatakan monomorfisma esensial jika $Im(f)\leqslant_e N$. Modul M dikatakan bebas kuadrat jika untuk setiap submodul tak nol N M berlaku $N \neq X \oplus Y$ dengan $X \cong Y$ untuk setiap X M dan Y M. Modul M dan N dikatakan ortogonal jika untuk setiap A M dan B M dengan $A \cong B$ berakibat $A=B=0$.

Definisi 1:
Modul M atas ring R dikatakan modul auto invarian jika M invarian terhadap setiap automorfisma pada $E(M)$, yaitu $\varphi(M) \subseteq M$ untuk setiap $\varphi \in Aut_R(E(M))$.

Definisi di atas memperlihatkan bahwa pendefinisian modul auto invarian ditinjau dari pemetaan pada perluasan esensial dari modul tersebut. Berikut ini akan dikaji tentang karakterisasi dari modul auto invarian yang ditinjau berdasarkan perluasan pemetaan pada submodul-submodul esensialnya.

Teorema 2:
Diberikan modul M atas ring R. Pernyatan-pernyataan berikut ekuivalen.
1) *Modul M merupakan modul auto invarian.*
2) *Setiap isomorfisma pada submodul esensial di M diperluas menjadi endomorfisma pada M.*
3) *Setiap isomorfisma pada submodul esensial di M diperluas menjadi automorfisma pada M.*

Bukti:
($1\Rightarrow 3$) Misalkan X dan Y merupakan submodul-submodul esensial di M dan $\alpha: X \to Y$ merupakan isomorfisma. Berdasarkan Proposisi 5.13 dalam [3] terdapat automorfisma β pada $E(M)$ sedemikian sehingga $\beta|_X=\alpha$. Diperoleh $\beta(M) \subseteq M$ dan $\beta^{-1}(M) \subseteq M$, sebab M auto invarian. Jelas bahwa $\beta|_M$ injektif. Diambil sebarang $m \in M$ diperoleh $m'=\beta^{-1}(m) \in M$ sedemikian sehingga $\beta(m')=m$. Diperoleh β merupakan epimorfisma. Jadi β merupakan automorfisma pada M.

($3\Rightarrow 2$) Jelas.

($2\Rightarrow 1$) Diambil sebarang $\sigma \in Aut_R(E(M))$. Misalkan $Y=\sigma(M) \cap M$, $X=\sigma^{-1}(Y)$ dan $\alpha=\sigma|_X$. Jelas bahwa $Y \leqslant_e M$, $X \leqslant_e M$ dan α merupakan isomorfisma dari X ke Y. Berdasarkan hipotesis, terdapat $\beta \in End_R(M)$ sedemikian sehingga $\beta|_X=\alpha$. Andaikan $Y \cap (\sigma-\beta)(M) \neq 0$, diperoleh $y=(\sigma-\beta)(x)$ untuk suatu $0 \neq y \in Y$ dan $X \in M$. Akibatnya, $\sigma(x)=y+\beta(x) \in Y$ sehingga $y=0$. Kontradiksi dengan $0 \neq Y$. Diperoleh $Y \cap (\sigma-\beta)(M)=0$ maka $(\sigma-\beta)(M)=0$, sebab $Y \leqslant_e E(M)$. Jadi $\sigma(M)=\beta(M) \subseteq M$. Terbukti bahwa M merupakan modul auto invarian. ■

Catatan:
Tidak setiap submodul dari modul auto invarian merupakan modul auto invarian. Modul $\mathbb{Q}$ atas ring $\mathbb{Z}$ merupakan modul auto invarian tetapi $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q}$ bukan merupakan modul auto invarian. Berikut ini diberikan syarat cukup agar submodul dari modul auto invarian merupakan modul auto invarian.
Submodul N di M dikatakan invarian penuh jika $f(N) \subseteq N$ untuk setiap $f \in End_R(M)$.

Lemma 3:
Diketahui M modul auto invarian dan N M. Jika N submodul invarian penuh dan N $_e$ M maka N merupakan modul auto invarian.

Bukti:
Misalkan X dan Y merupakan submodul-submodul esensial di N dengan $X \cong Y$. Berdasarkan Proposisi 5.6 (a) dalam [4] diperoleh $X \leqslant_e M$ dan $Y \leqslant_e M$. Misalkan isomorfisma maka terdapat endomorfisma β pada M yang memperluas α sebab M modul auto invarian. Diperoleh $\beta(N) \subseteq N$ sehingga $\beta|_N$ merupakan endomorfisma pada N yang memperluas α. Jadi N merupakan modul auto invarian. ■

Selanjutnya akan dilihat sifat-sifat dari modul auto invarian yang terkait dengan dekomposisi modul tersebut.

Teorema 4:
Jika modul M merupakan modul auto invarian maka $M=X \oplus Y$ dengan X merupakan modul quasi-injektif dan Y modul bebas kuadrat yang ortogonal dengan X.

Bukti:
Misalkan himpunan $\Gamma=\{(A,B,f) | A,B\ M, A\cap B=0$, dan $f:A\to B$ isomorfisma$\}$. Didefinisikan urutan pada Γ, yaitu $(A,B,f)\leq(A',B',f')$ jika dan hanya jika $A\subseteq A'$, $B\subseteq B'$ dan f' memperluas f. Diperoleh bahwa Γ mempunyai elemen maksimal katakan (A,B,f). Misalkan C' komplemen dari $A\oplus B$ maka C' harus bebas kuadrat. Selanjutnya, didefinisikan pemetaan $g:A\oplus B\oplus C'\to A\oplus B\oplus C'$ dengan $g:(a+b+c)=f^{-1}(b)+f(a)+c$. Diperhatikan bahwa $g\in Aut(A\oplus B\oplus C')$ sehingga berdasarkan Proposisi 2 terdapat $g'\in Aut_R(M)$ yang memperluas g. Klaim bahwa A tertutup secara esensial di M. Andaikan terdapat submodul dengan $A'\leqslant_e M$ dengan $A\subseteq A'$ maka $(A,B,f)\leq(A',g'|_{A'}(A'),g'|_{A'})$. Kontradiksi dengan maksimalitas (A,B,f). Jadi A tertutup secara esensial di M dan B juga tertutup secara esensial di M sebab $A\cong B$. Berdasarkan Lemma 7 dalam Singh dan Sritavasta [9, 2012] diperoleh $M=(M\cap E(A))\oplus(M\cap E(B))\oplus M\cap E(C'))$ maka $M=A\oplus B\oplus C'$. Diperoleh $A\oplus B$ merupakan modul auto invarian sehingga A dan B relatif injektif serta $A\oplus B\oplus$ dan C' juga relatif injektif. Berdasarkan [5], $A\oplus B\oplus$ merupakan modul quasi-injektif.

Selanjutnya didefinisikan himpunan $W=\{(D',f) | D'\ C'$ dan $f:D'\to B$ monomorfisma$\}$. Berdasarkan Lemma Zorn, himpunan W mempunyai elemen maksimal katakan (B',t). Akibatnya, B' tertutup secara esensial di C' sebab B C'-injektif dan t monomorfisma yang maksimal. Dengan cara yang analog, diperoleh $t(B')$ tertutup secara esensial di B. Lebih jauh, $t(B')$ merupakan suku langsung di B sehingga B' merupakan submodul C'-injektif, yaitu $C'=B'\oplus C$ untuk suatu submodul C. Andaikan C dan B ortogonal, yaitu $B_1\cong C_1$ untuk suatu submodul taknol B_1 B dan C_1 C. Akibatnya, $B_1\cap t(B')=0$ sebab C' bebas kuadrat. Kontradiksi dengan maksimalitas t. Jadi B dan C ortogonal. Selanjutnya dipilih $X=A\oplus B\oplus B'$ dan $Y=C$ maka $M=X\oplus Y$ dengan X modul quasi-injektif dan Y modul auto invarian yang bebas kuadrat dan ortogonal dengan X. ■

3. MODUL AUTO INVARIAN DAN MODUL PSEUDO INJEKTIF ADALAH SAMA

Berdasarkan definisi modul auto invarian diperoleh bahwa setiap modul pseudo injektif merupakan modul auto invarian. Selanjutnya, akan dikaji bagaimana hubungan antara modul pseudo injektif dan modul auto invarian.

Lemma 5.
Diberikan modul A dan B atas ring R dan $M=A\oplus B$. Modul A B-injektif jika dan hanya jika untuk setiap submodul C M dengan $C\cap A=0$, terdapat submodul D M sedemikian sehingga $C\subseteq D$ dan $A\oplus D=M$.

Bukti:
($\Rightarrow$) Misalkan π_1 dan π_2 berturut-turut adalah pemetaan proyeksi dari M ke A dan dari M ke B. Selanjutnya dibentuk barisan eksak $0\to C\xrightarrow{\alpha}B$ dan $\beta\in Hom_R(C,A)$ dengan $\alpha=\pi_2|_C$ dan $\alpha=\pi_1|_C$. Oleh sebab A B-injektif maka terdapat $f\in Hom_R(B,A)$ sedemikian sehingga $\beta=f\alpha$.
Dibentuk himpunan $D=\{f(b)+b | b\in B\}$. Jelas bahwa $D\neq\phi$. Selanjutnya ambil sebarang $c\in C$, diperoleh $f(c)=f(a(c))=\beta(c)=0$. Akibatnya, $c=0+c=f(c)+c\in D$. Jadi $C\subseteq D$. Berdasarkan definisi himpunan D maka $M=A\oplus D$.
($\Leftarrow$) Diambil sebarang L B dan $g\in Hom_R(L,A)$. Didefinisikan himpunan $H=\{-g(x)+x | x\in L\}$. Jelas bahwa $H\neq\phi$. Misalkan $x\in A\cap H$, diperoleh $x=-g(y)+y\in A$ untuk suatu $y\in L$. Akibatnya $y=0$ sehingga $A\cap H=0$. Berdasarkan hipotesis terdapat H' M sedemikian sehingga $H\subseteq H'$ dan $M=A\oplus H'$. Misalkan $\pi:M\to A$ merupakan proyeksi dengan $Ker(\pi)=H'$. Dipilih $h=\pi|_B$, maka untuk setiap $x\in L$ berlaku $h(x)=(g(x)-g(x)+x)=\pi(g(x))+\pi(-g(x)+x)=g(x)$. Jadi modul A adalah B-injektif.

Teorema 6:
Modul M merupakan modul auto invarian jika dan hanya jika M merupakan modul pseudo-injektif.

Bukti:

($\Leftarrow$) Jelas.

($\Rightarrow$) Diketahui modul M auto invarian dan misalkan C M dan f:$C \rightarrow M$ monomorfisma. Berdasarkan Teorema 4 diperoleh M=$A \oplus B$ dengan A modul quasi-injektif dan B modul auto invarian yang bebas kuadrat serta A dan B relatif injektif. Misalkan K komplemen dari $f(C \cap B) \cap (C \cap B)$ di B. Berdasarkan Lemma 15 dalam [7] diperoleh $K \oplus [f(C \cap B) \cap (C \cap B)]\,{}_{e}K \oplus f(C \cap B)$ dan $K \oplus [f(C \cap B) \cap (C \cap B)]\,{}_{e}K \oplus (C \cap B)$. Lebih lanjut $A \oplus K \oplus f(C \cap B)\,{}_{e}M$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 7.5 dalam [3] diperoleh $K \oplus f(C \cap B) \subseteq B'$ dan M=$A \oplus B'$ untuk suatu B' M. Diperoleh bahwa $B \cong B'$ maka $K \oplus f(C \cap B)\,{}_{e}B'$. Isomorfisma $f|_{(C \cap B)} \oplus Id_K$:$(C \cap B) \oplus K \rightarrow f(C \cap B) \oplus K$ diperluas menjadi isomorfisma f':$B \rightarrow B'$ sebab B modul auto invarian. Didefinisikan pemetaan g:C+$B \rightarrow f(C)$+B' dengan $g(c+b)=f(c)+f'(b)$. Jelas g memperluas f. Misalkan $\pi A \oplus B \rightarrow A$ pemetaan proyeksi. Diperoleh $B+C=B \oplus \pi C$ atau $\pi(C)=(B+C) \cap A$. Karena A dan B relatif injektif maka M A-injektif. Akibatnya, $g|_{\pi(C)}$ diperluas menjadi homomorfisma g':$A \rightarrow M$ sedemikian sehingga $g'|_{\pi(C)}=g'|_{(B+C) \cap A}=g|_{(B+C) \cap A}$. Selanjutnya, didefinisikan h:$M \rightarrow M$ dengan $h(\alpha+x)=g'(\alpha)+g(x)$ untuk setiap $\alpha \in A$ dan $x \in (B+C)$. Berdasarkan pembentukan g dan g', jelas bahwa h memperluas f. Jadi M merupakan modul pseudo-injektif. ■

4. SYARAT CUKUP MODUL AUTO INVARIAN AGAR MERUPAKAN MODUL QUASI INJEKTIF

Sebelum membahas syarat cukup modul auto invariant agar merupakan modul quasi injektif, terlebih dahulu diberikan beberapa konsep untuk mendukung proses pembuktian.

Pada modul atas daerah integral D dikenal ada konsep elemen torsi dalam [1]. Untuk sebarang ring R, berikut ini akan didefinisikan suatu bentuk yang analog dengan konsep torsi tersebut. Diberikan sebarang modul M atas ring R, didefinisikan himpunan $Z(M)=\{x \in M | Ann_R(x),\ {}_{e}R_R\}$ dengan $Ann_R(x)=\{r \in R | xr=0\}$.

Definisi 7:

Modul M atas ring R dikatakan modul singular jika $Z(M)=M$ dan sebaliknya modul M adalah modul nonsingular jika $Z(M)=0$.

Berdasarkan definisi di atas modul M atas ring R akan ekuivalen dengan modul torsi (bebas torsi) jika R merupakan daerah integral.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari modul kontinu.

Definisi 8:

Modul M atas ring R dikatakan kontinu jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

(C1) Setiap submodul dari M merupakan submodul esensial pada suku jumlahan langsung langsung untuk M.

(C2) Setiap submodul dari M yang isomorfis dengan suku jumlahan langsung dari M merupakan suku jumlahan langsung dari M.

Dalam teorema berikut, diberikan syarat cukup agar modul auto invariant merupakan modul quasi injektif.

Teorema 9:

Diberikan modul auto invariant M dan amplop injektif dari M yaitu $E(M)$. Jika M nonsingular dan $\sigma_1 \in Aut(E_1)$ berlaku $Id_{E1} - \sigma_1 \in Aut(E_1)$ dengan E_1 adalah suku jumlahan langsung dari $E(M)$ maka M merupakan modul quasi injektif.

Bukti:

Diambil sebarang $\sigma \in End_R(E(M))$, berdasarkan Lemma 3.7 pada [2] maka $\sigma=\alpha+\beta$ dengan α elemen idempotent di $End_R(E(M))$ dan $\beta \in Aut_R(E(M))$. Misalkan $E_1=\alpha(E(M)$ dan $E_2=(Id-\alpha)(E(M))$ maka $E(M)=E_1+E_2$. Selanjutnya, berdasrkan Lemma 3 dalam [8] diperoleh $M=M_1 \oplus M_2$ dengan $M_1=M \cap E_1$ dan $M_2=M \cap E_2$. Jelas bahwa $\beta(M) \subseteq M$ sebab M modul auto invarian. Di lain pihak, $\alpha(M) \subseteq \alpha(M_1)+\alpha(M_2) \subseteq M$. Dengan demikian $\sigma(M)=\alpha(M)+\beta(M) \subseteq M$. Jadi modul M merupakan modul quasi injektif.

5. PENUTUP

Berdasarkan pemaparan di atas ternyata modul auto invarian merupakan modul pseudo injektif. Jadi sebenarnya monomorphisma yang diberikan oleh Dihn [2] merupakan automorphisma. Modul proyektif merupakan dualitas dari modul injektif. Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimanakah dualisasi dari modul auto invarian dan hubungannya dengan proyektifitas suatu modul.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A. dan Weintraub, S,H. 1992. *Algebra "An Approach via Module Theory"*. Springer-Verlag New York, Inc.: USA. [1]

Dihn, H.Q. 2005. "A Note on Pseudo Injective Modules", *Communication in Algebra*. Vol 33. No. 2. 361-369. [2]

Dung, N.V. dkk. 1994. "Extending Modules", *Pitman Research Notes in Mathematics Series* 313. [3]

Goodearl, K. R. dan Warfield, R. B. 2004. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Springer-Verlag New York, Inc., USA. [4]

Lam, T.Y. 1999. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag New York, Inc., USA. [5]

Lee, T.K. dan Zhou, Y. 2013. "Modules which are Invariant under Automorphism of Their Injective Hulss". *J. Algebra and Its Aplication*, Vol. 12, 2. [6]

Noyan Er, Singh, S., dan Srivastava, A.K. 2013. "Rings and Modules which are Stable under Automorphism of Their Injective Hulls". *J. Algebra*, 379, 223-229. [7]

Singh, S. dan Srivastava, A. K. 2012. "Rings of Invariant Module Type and Automorphism-Invariant Modules". *Ring Theory and Its Application, Contempt. Math., Amer. Math. Soc.*, 609, 299-311. [8]

Wisbauer, R., 1991. *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publisher, Reading, Düsseldorf.[9]