MODUL BERSIH KANAN
RIGHT CLEAN MODULES

Cyrenia Novella Krisnamurti
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Sanata Dharma
Alamat korespondensi: Kampus III Paingan Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
Email: *cyrenianovella@gmail.com*

ABSTRACT

Right clean modules is This study aims to understand more about clean modules right in terms of ring endomorfisma on modules. This study is a literature. Will be discussed for the support of the properties right clean modules in advance will be discussed on clean modules, the kernel of a sufficiently clean rings, and rings modules isomorphism endomorfisma of an R-module M which is right clean rings.This research resulted in some of the things that is a right R-module M is said to be as clean modules endomorfisma right if there is a ring of the R-module M is a right clean ring.

Keywords: *right clean elements, endomofisms, left invers.*

1. PENDAHULUAN

Sebelumnya telah dikenal ruang vektor atas lapangan. Modul merupakan bentuk generalisasi dari ruang vektor yaitu perkalian skalarnya dikenakan pada suatu ring dengan elemen satuan. Contoh dari suatu modul adalah himpunan semua bilangan riil dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan modul atas dirinya sendiri. Selain himpunan semua bilangan riil contoh dari suatu modul adalah himpunan matriks berordo *n*x*n* dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan scalar merupakan modul atas semua bilangan riil.

Menurut Nicholson, ring dari semua transformasi linear yang berdimensi berhingga dari suatu ruang vector merupakan ring bersih. Sehingga untuk menentukan suatu modul bersih perlu ditinjau dari ring endomorfisma dari modul tersebut.

2. MODUL BERSIH

Berikut diberikan definisi dan beberapa sifat yang berlaku pada modul bersih.

Definisi 1 (Camillo dkk, 2006). Diberikan R-modul M dikatakan modul bersih apabila ring endomorfisma dari R-modul M bersifat bersih.

Untuk lebih memahami tentang modul bersih berikut diberikan contoh dari modul bersih. Contoh 2: Diberikan $\mathbf{Z}_6$-modul $\mathbf{Z}_6$ merupakan modul bersih karena $End_{\mathbf{Z}_6}\left(\mathbf{Z}_6\right) \cong \mathbf{Z}_6$. Diketahui bahwa $\mathbf{Z}_6$ merupakan ring bersih sehingga $End_{\mathbf{Z}_6}\left(\mathbf{Z}_6\right)$ adalah ring bersih.

Selanjutnya akan diberikan beberapa sifat yang berlaku dalam modul bersih. Teorema 3: (Camillo dkk., 2006). *Diberikan R-modul M dan e, f* $\in End_R(M)$ *dengan* $e^2=e$. *Elemen* $f-e \in End_R(M)$ *adalah unit jika hanya jika terdapat submodul-submodul C, D di M yang memenuhi* $M=C \oplus D$ *dengan* $f(Ker(e)) \subseteq C$, $(1-f)(Im(e)) \subseteq D$ *dan* $f{:}Ker(e) \to C$, $(1-f){:}Im(e) \to D$ *sehingga keduanya merupakan isomorfisma.*

Teorema di atas menunjukkan bahwa syarat perlu dan syarat cukup elemen unit di ring endomorfisma dari suatu modul. Sebagai akibat dari Teorema 3 berikut diberikan suatu teorema mengenai syarat perlu dan syarat perlu dari suatu elemen bersih pada suatu modul.

Teorema 4: (Camillo dkk, 2006). *Diberikan R-modul M dan e, f* $\in End_R$ (M) *dengan* $e^2=e$. *Elemen f* $\in End_R$ (M) *bersih jika dan hanya jika terdapat submodul-submodul C, D di M yang memenuhi* $M=Ker(e) \oplus Im(e)=C \oplus D$ *dengan* $f(Ker(e)) \subseteq C$, $(1-f)(Im(e)) \subseteq D$ *dan* $f{:}Ker(e) \to C$, $(1-f){:}Im(e) \to D$ *keduanya merupakan isomorfisme.*

Bukti, dengan menggunakan teorema 3.3.3 dapat dibuktikan secara trivial.

3. MODUL BERSIH KANAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang modul bersih kanan yaitu bentuk generalisasi dari dari modul bersih. Definisi modul bersih kanan ditinjau dari ring endomorfisma dari modul tersebut bersifat bersih kanan.

Definisi 5 (Călugăreanu, 2010). *Suatu R-modul kanan M dikatakan sebagai modul bersih kanan apabila terdapat ring endomorfisma dari R-modul M merupakan ring bersih kanan.*

Berikut beberapa sifat dari modul bersih kanan. Teorema 6 (Călugăreanu, 2010). *Diberikan R-modul M dengan* $f, e \in End_R(M)$ *dengan* e^2e. *Pemetaan* $f-e$ *merupakan monomorfisma jika hanya jika* $f|_{Ker(e)}$, $(1-f)|_{Im(e)}$ *monomorfisma dan* $f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)=0$.

Bukti, $\Rightarrow$) diketahui dan $f-e$ monomorfisma berarti $Ker(f-e)=0$. Akan dibuktikan $f|_{Ker(e)}$ monomorfisma, $(1-f)_{Im(e)}$ monomorfisma, dan $f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)=0$.

i. Akan ditunjukkan $f|Ker(e)$ monomorfisma ekuivalen dengan menunjukkan $Ker(f|_{Ker(e)})=0$.
$Ker(f|_{Ker(e)})$
$=Ker(f(Ker(e)))$
$=\{x \in Ker(e) | f(x)=0\}$
$=\{x \in Ker(e) | f(x)=0 \wedge e(x)=0\}$
$=\{x \in Ker(e) | f(x)-0=0\}$
$=\{e(x)=f(x)=0\}$
Karena $f-e$ monomorfisma maka diperoleh $x=0$. Sehingga $f|_{Ker(e)}$ monomorfisma.

ii. Akan menunjukkan $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma ekuivalen dengan menunjukkan bahwa $Ker((1-f)|_{Im(e)})=0$. Diperhatikan
$Ker((1-f)|_{Im(e)})$
$=Ker((1-f)Im(e))$
$=\{x \in Im(e) | (1-f)x=0\}$,
menurut Teorema dari Anderson dan Fuller yang menyatakan bahwa $Ker(1-e)=Im(e)$ diperoleh bahwa $x \in Ker(1-e)$ sehingga diperoleh
$=\{x \in Im(e) | (1-f)x=0 \wedge (1-e)x=0\}$
$=\{x \in Im(e) | ((1-f)x)-((1-e)x)=0\}$
$=\{x \in Im(e) | ((1-f)-(1-e))x=0\}$
$=\{x \in Im(e) | (f-e)x=0\}$
$=\{0\}$
Diperoleh bahwa $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma.

iii. Akan ditunjukkan $f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)=0$
Diambil sebarang $y \in f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)$ berarti $y \in f(Ker(e))$ dan $y \in (1-f)Im(e)$.
Karena $y \in f(Ker(e))$ maka $y=f(x)$ untuk $x \in Ker(e)$, sehingga $e(x)=0$ maka diperoleh bahwa
$y-0=f(x)-e(x)$
$y=(f-e)(x)$ .... (i)
Karena $y \in (1-f)Im(e)$ maka $y=1-f(z)$ untuk suatu $z \in Im(e)$, karena $Im(e)=Ker(1-e)$ maka $z \in Ker(1-e)$ sehingga $(1-e)z=0$. Oleh karena itu,
$y-0=(1-f)z-(1-e)z$
$y=(1-f-1+e)z$
$y=(f-e)z$ ....(ii)
Dari (i) dan (ii) diperoleh
$y-y=(f-e)x-(f-e)z$
$0=(f-e)x-(f-e)z$
$(f-e)(x)=(f-e)(z)$
$(f-e)(x)-(f-e)(z)=0.$

Karena $f-e$ homomorfisma, maka $(f-e)(x-z)=0$. Diketahui bahwa $f-e$ monomorfisma sehingga diperoleh $x-z=0$. Diketahui $e(x)=0$ dan $(1-e)(z)=0$, akan sama jika $x=0=z$ sehingga diperoleh $y=f(x)=f(0)=0$.

Bukti, $\Leftarrow$) diketahui $f|_{Ker(e)}, (1-f)|_{Im(e)}$ *monomorfisma dan* $f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)=0$. Akan dibuktikan $f-e$ monomorfisma. Diambil sebarang $m_1, m_2 \in M$ sedemikian sehingga $f-e(m_1)=f-e(m_2)$ Akan ditunjukkan bahwa $m_1=m_2$.

$f-e(m_1)=f-e(m_2)$
$f(m_1)-e(m_1)=f(m_2)-e(m_2)$
$f(m_1)-f(m_2)=e(m_1)-e(m_2)$
$f(m_1)-f(m_2)-e(m_1)+e(m_2)=0$
$f(m_1-m_2)-e(m_1-m_2)=0$

Diketahui bahwa $f(Ker(e)) \cap (1-f)Im(e)=0$ berarti $m_1-m_2=0$ sehingga diperoleh $m_1=m_2$. Jadi Teorema terbukti. ■

Berikut diberikan sifat pemetaan dari modul bersih kanan.

Lemma 7 (Călugăreanu, 2010). *Diberikan R-modul M dengan* $f,e \in End_R(M)$ *dengan* $e^2=e$. *Elemen* $f-e$ *unit di* $End_R(M)$ *jika hanya jika* $f|_{Ker(e)}, (1-f)|_{Im(e)}$ *monomorfisma dan* $f(Ker(e)) \oplus (1-f)Im(e)=M$.

Bukti, dengan menggunakan Teorema 3 dan teroema 4 terbukti secara trivial. ■

Berikut diberikan suatu lemma yang mendukung teorema selanjutnya. Lemma 8 (Călugăreanu, 2010) *Diberikan R-modul M dengan* *elemen $f,e \in End_R(M)$ dengan $e^2=e$. Fungsi $f|_{Ker(e)}:Ker(e) \to f(Ker(e))$ dan $(1-f)|_{Im(e)}:Im(e) \to (1-f)Im(e)$ merupakan fungsi surjektif.*

Bukti, dengan cara trivial jelas bahwa $f|_A:A \to f(A)$ dan $(1-f)|_B:B \to (1-f)B$ merupakan fungsi surjektif karena hasil fungsi tergantung pada domainnya. ■

Akibat 9 (Cãlugãreanu, 2010). *Diberikan R-modul M dengan elemen $f,e \in End_R(M)$ dengan $e^2=e$, $A=Ker(e);B=Im(e)$. Fungsi $f|_{Ker(e)}$, $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma jika hanya jika bahwa $f|_{Ker(e)}$ dan $(1-f)|_{Im(e)}$ merupakan isomorfisma.*

Bukti, diketahui bahwa $f|_A$ monomorfisma berarti $Ker(f|_A)=\{0\}$ dan $(1-f)|_B$ monomorfisma berarti $Ker((1-f)|_B)=\{0\}$. Akan ditunjukka bahwa $f|_A$ dan $(1-f)|_B$ merupakan isomorfisma.

i. $f|_A$ merupakan isomorfisma.
   Dengan lemma 8 dan $f|_A$ monomorfisma jelas bahwa $f|_A$ merupakan isomorfisma.

ii. $(1-f)|_B$ merupakan isomorfisma.
   Dengan lemma 8 dan $(1-f)|_B$ monomorfisma jelas bahwa $(1-f)|_B$ merupakan isomorfisma.

Bukti, $\Leftarrow$) diketahui bahwa $f|_A$ dan $(1-f)|_B$ merupakan isomorfisma. Akan ditunjukkan $f|_A$ dan $(1-f)|_B$ monomorfisma.

Bukti trivial. Jadi Akibat terbukti. ■

Teorema 10 (Cãlugãreanu, 2010). *Diberikan ring $End_R(M)$ dan $f,e \in End_R(M)$ dengan $e^2=e$. Jika $f(Ker(e)) \cap (1-f)(Im(e))=0$ maka elemen $u=f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)}:Ker(e) \oplus Im(e) \to f(Ker(e)) \oplus (1-f)(Im(e))$ merupakan isomorfisma.*

Bukti, diketahui bahwa $f(Ker(e)) \cap (1-f)(Im(e))=0$, $u=f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)}=x+y$ dengan $x \in f|_{Ker(e)}$ dan $y \in (1-f)|_{Im(e}$ dan u merupakan homomorfisma. Tinggal menunjukkan bahwa u injekti dan u surjektif.

a. Akan ditunjukkan u injektif
   Diambil sebarang $r,t \in Ker(e) \oplus Im(e)$ berarti $r=a_1+b_1$ dan $t=a_2+b_2$ dengan $a_{1,}a_2 \in Ker(e)$ dan $b_{1,}b_2 \in Im(e)$.
   $u(r)=u(a_1+b_1)=z \in f(Ker(e)) \oplus (1-f)(Im(e))$
   $u(r)=u(a_1+b_1)=z=f(a_1)+(1-f)(b_1)$
   dan
   $u(t)=u(a_2+b_2)=s \in f(Ker(e)) \oplus (1-f)(Im(e))$
   $u(t)=u(a_2+b_2)=s=f(a_2)+(1-f)(b_2)$
   $u(r)=u(t)$
   $f(a_1)+(1-f)(b_1)=f(a_2)+(1-f)(b_2)$
   $f(a_1)-f(a_2)+(1-f)(b_1)-(1-f)(b_2)=0$
   $f(a_1-a_2)+(1-f)(b_1-b_2)=0$
   $f(a_1-a_2)+(1-f)(b_1-b_2)=f(0)+(1-f)(0)$
   Sehingga diperoleh $a_1-a_2=0$ dan $b_1-b_2=0$. Dengan demikian diperoleh $a_1=a_2$ dan $b_1=b_2$, $r=a_1+b_1=a_2+b_2=t$. Jadi terbukti u injektif.

b. Akan ditunjukkan u surjektif.
   Secara trivial jelas bahwa u adalah surjektif karena
   $u:Ker(e) \oplus Im(e)f(Ker(e)) \to f(Ker(e)) \oplus (1-f)(Im(e))$ dengan Lemma 4.2.3 dan Akibat 4.2.5.
   Dari a dan b terbukti. ■

Lemma 11 (Cãlugãreanu, 2010). *Diberikan ring $End_R(M)$. Elemen $f-e$ merupakan unit kiri dari ring $End_R(M)$* jika hanya jika $f|_{Ker(e)}$, $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma, $f(Ker(e)) \cap (1-f)(Im(e))=0$, $f|_{Ker(e)}$ dan $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma $f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)} \in End_R(M)$ dan mempunyai invers kiri di.

Bukti, untuk membuktikan Lemma ini dengan Teorema dari Camillo yang menyatakan bahwa suatu elemen bersih $f \in End_R(M)$ jika hanya jika terdapat submodul-submodul C, D dari modul M dan $f:Ker(e) \to C$ dan $(1-f):Im(e) \to D$ saling isomorfis jelas bahwa $f|_{Ker(e)}$ dan $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma dan jelas bahwa $f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)} \in End_R(M)$ mempunyai unit. Hal ini akan ekuivalen dengan $f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)} \in End_R(M)$ mempunyai invers kiri di $End_R(M)$. ■

Teorema 12 (Cãlugãreanu, 2010). *Diberikan ring $End_R(M)$. Suatu elemen $f \in End_R(M)$ adalah elemen bersih kanan jika hanya jika $M=Ker(e) \oplus Im(e)$, $f|_{Ker(e)}$, $(1-f)|_{Im(e)}$ monomorfisma, $f(Ker(e)) \cap (1-f)(Im(e))=0$, $f|_{Ker(e)} \oplus (1-f)|_{Im(e)}:M \to M$ mempunyai invers kiri dari $End_R(M)$.*

Bukti, dengan menggunakan Lemma 11 jelas terbukti. ■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Suatu modul dikatakan sebagai modul bersih kanan jika ring endomorfisma dari modul tersebut merupakan ring bersih kanan.
2. Selisih pemetaan merupakan monomorfisma jika hanya jika pemetaan yang terbatas dari kernel dari pemetaan yang lain dan selisih elemen identias dengan suatu pemetaan yang

terbatas dengan image dari pemetaan yang lain merupakan monomorfisma dan irisan pemetaan tersebut adalah nol.

3. Jumlah langsung dari pemetaan-pemetaan tersebut merupakan bersifat isomorfisma.

DAFTAR PUSTAKA

Cãlugãreanu.G. 2010. "One-sided Clean Rings", *Studia Matematica*. No.3 Vol.55, pp. 83-86.

Camillo, V.P., and Anderson D.D. 2002. "Commutative Rings whose Elements are a Sum of Unit and Idempotent", *Communications in Algebra*, No.7 Vol.30, pp. 3327-3336.

Hazenwingkel, M., Nadiya G., and Kirichenko V.V., 2005. *Algebras, Rings and Modules*, Vol. 1, New York: Kluwer Academic.

Nicholson, Varadarajan K., Zou Y. 2004. *Clean Endomorphism Rings*, Vol. 83, pp. 340-343.