SIFAT HASIL KALI DALAM-2 YANG DIPERUMUM STANDAR

Antonius Yudhi Anggoro

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma
Alamat Korespondensi: Kampus III Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
Email: *yudhianggoro@usd.ac.id*

ABSTRACT

Suppose that V is an inner product space. We know that for all $u,v\in V$, $|\langle u,v\rangle|=||u||\,||v||\cos\theta$, where θ is canonical angle between two subspaces generated by v and u. In this paper, we show generalization of this property in the standard generalized 2-inner product space. This generalization goes as follows: for all $x_1,x_2,y_1,y_2\in V$, $|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s|=||x_1,x_2||\,||y_1,y_2||\prod_{i=1}^{j}\cos\theta_1$, where $j=1$ or $j=2$. Geometrically, $||x_1,x_2||$ and $||y_1,y_2||$ respectively represent the area of parallelogram spaned by $\{x_1,x_2\}$ and the area of parallelogram spaned by $\{y_1,y_2\}$. The value of $\prod_{i=1}^{j}\cos\theta_1$ represents the cosinus of angle between $sp\{x_1,x_2\}$ and $sp\{y_1,y_2\}$.

Keyword : *canonical angle, standard generalized 2-inner product, standard generalized 2-inner product space.*

1. PENDAHULUAN

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Konsep hasil kali dalam-n yang diperumum diperkenalkan oleh Trencevsky dan Melcesky sebagai perumuman hasil kali dalam-n yang sebelumnya diperkenalkan oleh Misiak. Hasil kali dalam-n sendiri adalah perumuman konsep hasil kali dalam yang telah dikenal dan banyak dikaji.

Perumuman konsep hasil kali dalam menjadi hasil kali dalam-n yang diperumun menginspirasi pertanyaan: sejauh mana struktur dan sifat-sifat ruang hasil kali dalam masih berlaku atau mempunyai padanan di ruang hasil kali dalam-n yang diperumum? Paper ini mengkaji topik terkait pertanyaan itu, yang dibatasi pada ruang hasil kali dalam-2 yang diperumum standar.

Salah satu kajian terkait hasil kali dalam yang telah banyak dikenal adalah hubungan antara hasil kali dalam dengan norma vektor dan sudut kanonik antara dua subruang yang dibangun vektor-vektor itu. Secara persis, misalkan V adalah ruang hasil kali dalam yang dilengkapi hasil kali dalam $\langle -,- \rangle$. Untuk setiap $u,v\in V$ berlaku $|\langle u,v\rangle|=||u||\,||v||\cos\theta$. Pada persamaan di atas, $||u||$ dan $||v||$ berturut-turut merupakan norma vektor u dan v sedangkan θ merupakan sudut kanonik antara subruang yang dibangun oleh u dan subruang yang dibangun oleh v.

Dalam paper ini akan ditunjukkan bahwa persamaan diatas memiliki padanan di ruang hasil kali dalam-2 yang diperumum standar, yaitu ruang vektor yang dilengkapi hasil kali dalam-2 yang diperumum standar.Hasil kali dalam-2 yang diperumum standar sendiri merupakan hasil kali dalam-2 yang diperumum, yang diinduksi oleh suatu hasil kali dalam. Untuk sampai pada tujuan itu, akan diberikan kembali sejumlah definisi dan teorema.

2. HASIL KALI DALAM-2 YANG DIPERUMUM DAN SUDUT KANONIK

Pada bagian ini akan dijelaskan kembali definisi hasil kali dalam-2 yang diperumum dan sudut kanonik antar dua subruang.

Definisi 2.1. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$ dan $dim(V) \geq 2$. Hasil kali dalam-2 yang diperumum adalah fungsi $\langle -,- | -,- \rangle : V^2 x V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1. $\langle u_1,u_2 | u_1,u_2 \rangle \geq 0$ untuk setiap $u_1,u_2 \in V$ dan $\langle u_1,u_2 | u_1,u_2 \rangle = 0$ jika dan hanya jika $u_1 = ku_2$ untuk suatu $k \in \mathbb{R}$.
2. $\langle u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle = \langle v_1,v_2 | u_1,u_2 \rangle$ untuk setiap $u_1,u_2,v_1,v_2 \in V$.
3. Untuk setiap $u_1,u_2,v_1,v_2,c \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku: $\langle \alpha u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle = \alpha \langle u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle$ dan $\langle u_1+c,u_2 | v_1,v_2 \rangle = \langle u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle + \langle c,u_2 | v_1,v_2 \rangle$.
4. $\langle u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle = -\langle u_2,u_1 | v_1,v_2 \rangle$ untuk setiap $u_1,u_2,v_1,v_2 \in V$.
5. Jika $\langle u_1,v_2 | v_1,v_2 \rangle = 0$ dan $\langle u_1,v_1 | v_1,v_2 \rangle = 0$ maka $\langle u_1,u_2 | v_1,v_2 \rangle = 0$ untuk sebarang $v_2 \in V$.

□

Ruang vektor V yang dilengkapi hasil kali dalam-2 yang diperumum disebut ruang hasil kali dalam-2 yang diperumum atau *ruang preHilbert-2*. Salah satu contoh hasil kali dalam-2 yang diperumum adalah hasil kali dalam-2 yang diperumum yang diinduksi oleh hasil kali dalam. Secara persis, untuk setiap $u_1,u_2,v_1,v_2 \in V$ didefinisikan

$$\langle u_1,u_2 \mid v_1,v_2 \rangle_s = \begin{vmatrix} \langle u_1,v_1 \rangle & \langle u_1,v_2 \rangle \\ \langle u_2,v_1 \rangle & \langle u_2,v_2 \rangle \end{vmatrix}.$$

Hasil kali dalam-2 yang diperumum di atas disebut dengan *hasil kali dalam-2 yang diperumum standar*. Selanjutnya untuk setiap $u,v \in V$ didefinisikan

$$\| u,v \| = \sqrt{\langle u,v \mid u,v \rangle}.$$

Secara geometris $\|u,v\|$ menyatakan luas jajargenjang yang dibangun oleh vektor u dan v.

Definisi 2.2. Misalkan L,M adalah subruang dari ruang hasil kali dalam V berdimensi n dan $0 < dim(L) = l \leq m = dim(M) \leq n$. *Sudut-sudut kanonik* antara L dan M adalah

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \ldots \leq \theta_l \leq \frac{\pi}{2}$$

yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$\cos\theta_1 = \langle a_1,b_1 \rangle = \max\{ \langle a,b \rangle \mid \|a\| = \|b\| = 1, a \in L, b \in M\}$$

$$\cos\theta_i = \langle a_i,b_i \rangle = \max \left\{ \langle a',b' \rangle \middle| \begin{array}{l} \|a'\| = 1, a' \in L, a' \perp a_k \\ \|b'\| = 1, b' \in M, b' \perp b_k \end{array} ; k = 1,2,\ldots,i-1 \right\}$$

Untuk setiap $j = 1,2,\ldots,l$ pasangan vektor (a_1,b_1) disebut *pasangan vektor kanonik*.

□

Besar sudut kanonik adalah tunggal, namun demikian pasangan vektor kanonik tidak. Sebagai contoh, dalam kasus $L = M$ terdapat tak hingga banyak pasangan vektor kanonik, namun besar semua sudut kanonik adalah 0.

3. HASIL UTAMA

Dalam subbab ini akan dibuktikan sebuah teorema yang selanjutnya dapat dipandang sebagai perluasan sifat $|\langle u,v \rangle| = \|u\|\|v\| \cos\theta$ yang berlaku di ruang hasil kali dalam.

Teorema 3.1. Misalkan V adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam-2 yang diperumum standar dan $x_1,x_2,y_1,y_2 \in V$ sedemikian hingga $sp\{x_1,x_2\} \neq \{0\}$ dan $sp\{y_1,y_2\} \neq \{0\}$. Jika $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j$, j=1 atau j=2, adalah sudut-sudut kanonik antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$,

$$\text{maka } |\langle x_1,x_2 | y_1,y_2 \rangle_s| = \|x_1,x_2\| \|y_1,y_2\| \prod_{i=1}^{j} \cos\theta_i.$$

□

Bukti. Misalkan $x_1,x_2,y_1,y_2 \in V$ sedemikian hingga $sp\{x_1,x_2\} \neq \{0\}$ dan $sp\{y_1,y_2\} \neq \{0\}$ serta $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j$, j=1 atau j=2, adalah sudut-sudut kanonik antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$. Jika $dim(sp\{x_1,x_2\}) = 1$ maka $x_2 = kx_1$ untuk suatu $k \in \mathbb{R}$. Akibatnya,

$$\langle x_1,x_2 | x_1,x_2 \rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1 \rangle & \langle x_1,x_2 \rangle \\ \langle x_2,x_1 \rangle & \langle x_2,x_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1 \rangle & \langle x_1,kx_1 \rangle \\ \langle kx_1,x_1 \rangle & \langle kx_1,kx_1 \rangle \end{vmatrix}$$

$$= k^2 \langle x_1,x_1 \rangle - k^2 \langle x_1,x_1 \rangle = 0$$

Jadi, $\|x_1,x_2\| = 0$. Di lain pihak,

$$\langle x_1,x_2 | y_1,y_2 \rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,y_1 \rangle & \langle x_1,y_2 \rangle \\ \langle x_2,y_1 \rangle & \langle x_2,y_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x_1,y_1 \rangle & \langle x_1,y_2 \rangle \\ \langle kx_1,y_1 \rangle & \langle kx_1,y_2 \rangle \end{vmatrix}$$

$$= k\begin{vmatrix}\langle x_1, y_1\rangle & \langle x_1, y_2\rangle \\ \langle x_1, y_1\rangle & \langle x_1, y_2\rangle\end{vmatrix}$$

$$= k(\langle x_1,y_1\rangle\langle x_1,y_2\rangle - \langle x_1,y_1\rangle\langle x_1,y_2\rangle) = 0$$

Dengan demikian, jika sudut kanonik antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$ dinotasikan dengan θ_1, maka diperoleh $|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = 0 = \|x_1,x_2\|\|y_1,y_2\|\cos\theta_1$.

Untuk kasus $dim(sp\{y_1,y_2\}) = 1$, dengan cara yang sama diperoleh $|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = 0 = \|x_1,x_2\|\|y_1,y_2\|\cos\theta_1$. Di sini, θ_1 merupakan sudut kanonik antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$.

Selanjutnya akan ditinjau untuk kasus $dim(sp\{x_1,x_2\}) = 2$, dan $dim(sp\{y_1,y_2\}) = 2$. Pada kasus ini, terdapat dua sudut kanonik, misalkan θ_1 dan θ_2. Notasikan $\alpha_i = \cos\theta_i$ dan $\beta_i = \sin\theta$, untuk setiap $i\in\{1,2\}$.

Kasus $sp\{x_1,x_2\}\cap sp\{y_1,y_2\} = \{0\}$ Menurut [2], terdapat basis ortonormal $\{u_1,u_2\}$ dari $sp\{x_1,x_2\}$ dan himpunan ortonormal $\{v_1,v_2\}$ sedemikian hingga $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ basis ortonormal dari $sp\{x_1,x_2\}+sp\{y_1,y_2\}$ dan $\{\alpha_1u_1+\beta_1v_1,\alpha_2u_2+\beta_2v_2\}$ basis ortonormal dari $sp\{y_1,y_2\}$. Dengan demikian,

$$x_1 = \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2 \qquad \ldots(1)$$

$$x_2 = \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2 \qquad \ldots(2)$$

$$y_1 = \delta_{11}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2) \qquad \ldots(3)$$

$$y_2 = \delta_{21}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2) \qquad \ldots(4)$$

untuk suatu $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22},\delta_{11},\delta_{12},\delta_{21},\delta_{22}\in\mathbb{R}$. Dengan mensubstitusikan persamaan (1) dan (2) itu ke

$$\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = \begin{vmatrix}\langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle\end{vmatrix},$$

didapatkan $\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})^2$. Dengan demikian, $\|x_1,x_2\|=|\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}|$.

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (3) dan (4) ke

$$\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix}\langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle\end{vmatrix}$$

serta memperhatikan bahwa $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ untuk setiap $i\in\{1,2\}$, didapatkan $\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = (\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})^2$. Jadi, $\|y_1,y_2\| = |\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|$. Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\langle x_1,y_1\rangle &= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{11}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle\\ &= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{11}\alpha_1u_1+\delta_{11}\beta_1v_1+\delta_{12}\alpha_2u_2+\delta_{12}\beta_2v_2\rangle\\ &= \lambda_{11}\delta_{11}\alpha_1+\lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_1,y_2\rangle &= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{21}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle\\ &= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{21}\alpha_1u_1+\delta_{21}\beta_1v_1+\delta_{22}\alpha_2u_2+\delta_{22}\beta_2v_2\rangle\\ &= \lambda_{11}\delta_{21}\alpha_1+\lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_2,y_1\rangle &= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{11}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle\\ &= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{11}\alpha_1u_1+\delta_{11}\beta_1v_1+\delta_{12}\alpha_2u_2+\delta_{12}\beta_2v_2\rangle\\ &= \lambda_{21}\delta_{11}\alpha_1+\lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_2,y_2\rangle &= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{21}(\alpha_1u_1+\beta_1v_1)+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle\\ &= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{21}\alpha_1u_1+\delta_{21}\beta_1v_1+\delta_{22}\alpha_2u_2+\delta_{22}\beta_2v_2\rangle\\ &= \lambda_{21}\delta_{21}\alpha_1+\lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh,

$$\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix}\langle x_1, y_1\rangle & \langle x_1, y_2\rangle \\ \langle x_2, y_1\rangle & \langle x_2, y_2\rangle\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda_{11}\delta_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2 & \lambda_{11}\delta_{21}\alpha_1 + \lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2 \\ \lambda_{21}\delta_{11}\alpha_1 + \lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2 & \lambda_{21}\delta_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_{11}\delta_{11}\alpha_1+\lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2)(\lambda_{21}\delta_{21}\alpha_1+\lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2) -(\lambda_{11}\delta_{21}\alpha_1+\lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2)(\lambda_{21}\delta_{11}\alpha_1+\lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2)$$

$$= \lambda_{11}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{21}\alpha_1^2+\lambda_{11}\lambda_{22}\delta_{11}\delta_{22}\alpha_1\alpha_2+ \lambda_{12}\lambda_{21}\delta_{12}\delta_{21}\alpha_1\alpha_2+\lambda_{12}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{22}\alpha_2^2-\lambda_{11}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{21}\alpha_1^2-\lambda_{11}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{21}\alpha_1\alpha_2-\lambda_{12}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{22}\alpha_1\alpha_2-\lambda_{12}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{22}\alpha_2^2$$

$$= \lambda_{11}\lambda_{22}\alpha_1\alpha_2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})-\lambda_{12}\lambda_{21}\alpha_1\alpha_2$$

$$(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})$$

$$= (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})\alpha_1\alpha_2 .$$

Sehingga diperoleh,

$$|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = |\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}||\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|\alpha_1\alpha_2$$

$$|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = ||x_1,x_2||||y_1,y_2||\cos\theta_1\cos\theta_2$$

Kasus $sp\{x_1,x_2\}\cap sp\{y_1,y_2\} = W$ dengan $dim(W)=1$. Karena $dim(W)=1$ maka $\cos\theta_1=1$. Selanjutnya menurut [2], terdapat basis ortonormal $\{u_1,u_2\}$ dari $sp\{x_1,x_2\}$ dan himpunan ortonormal $\{v_2\}$ sedemikian hingga $\{u_1,u_2,v_2\}$ basis ortonormal dari $sp\{x_1,x_2\}+sp\{y_1,y_2\}$ dan $\{u_1,\alpha_2u_2+\beta_2v_2\}$ basis ortonormal dari $sp\{y_1,y_2\}$. Dengan demikian,

$$x_1 = \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2 \quad \ldots(5)$$

$$x_2 = \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2 \quad \ldots(6)$$

$$y_1 = \delta_{11}u_1+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2) \quad \ldots(7)$$

$$y_2 = \delta_{21}u_1+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2) \quad \ldots(8)$$

untuk suatu $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22},\delta_{11},\delta_{12},\delta_{21},\delta_{22}\in\mathbb{R}$. Dengan mensubstitusikan persamaan (5) dan (6) itu ke

$$\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle \end{vmatrix},$$

didapatkan $\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})^2$. Dengan demikian, $||x_1,x_2||=|\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}|$.

Selanjutnya, dengan mensubstitusi (7) dan (8) ke

$$\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle y_1,y_1\rangle & \langle y_1,y_2\rangle \\ \langle y_2,y_1\rangle & \langle y_2,y_2\rangle \end{vmatrix}$$

serta memperhatikan bahwa $\alpha_2^2+\beta_2^2 = 1$, didapatkan $\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = (\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})^2$. Jadi, $||y_1,y_2|| = |\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|$. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\langle x_1,y_1\rangle = \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle$$
$$= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}\alpha_2u_2+\delta_{12}\beta_2v_2\rangle$$
$$= \lambda_{11}\delta_{11}+\lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2$$

$$\langle x_1,y_2\rangle = \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle$$
$$= \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}\alpha_2u_2+\delta_{22}\beta_2v_2\rangle$$
$$= \lambda_{11}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2$$

$$\langle x_2,y_1\rangle = \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle$$
$$= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}\alpha_2u_2+\delta_{12}\beta_2v_2\rangle$$
$$= \lambda_{21}\delta_{11}+\lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2$$

$$\langle x_2,y_2\rangle = \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}(\alpha_2u_2+\beta_2v_2)\rangle$$
$$= \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}\alpha_2u_2+\delta_{22}\beta_2v_2\rangle$$
$$= \lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2$$

Dengan demikian diperoleh,

$$\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,y_1\rangle & \langle x_1,y_2\rangle \\ \langle x_2,y_1\rangle & \langle x_2,y_2\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{11}\delta_{11}+\lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2 & \lambda_{11}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2 \\ \lambda_{21}\delta_{11}+\lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2 & \lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_{11}\delta_{11}+\lambda_{12}\delta_{12}\alpha_2)(\lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{22}\delta_{22}\alpha_2) - (\lambda_{11}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{22}\alpha_2)(\lambda_{21}\delta_{11}+\lambda_{22}\delta_{12}\alpha_2)$$

$$= \lambda_{11}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{21}+\lambda_{11}\lambda_{22}\delta_{11}\delta_{22}\alpha_2+\lambda_{12}\lambda_{21}\delta_{12}\delta_{21}\alpha_2+\lambda_{12}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{22}\alpha_2^2-\lambda_{11}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{21}-\lambda_{11}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{21}\alpha_2-\lambda_{12}\lambda_{21}\delta_{11}\delta_{22}\alpha_2-\lambda_{12}\lambda_{22}\delta_{12}\delta_{22}\alpha_2^2$$

$$= \lambda_{11}\lambda_{22}\alpha_2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})-\lambda_{12}\lambda_{21}\alpha_2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})$$

$$= (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})\alpha_2 .$$

Dengan demikian, dengan mengingat $\alpha_1=1$diperoleh

$$|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = |\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}||\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|\alpha_1\alpha_2$$

$$|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = ||x_1,x_2||||y_1,y_2||\cos\theta_1\cos\theta_2$$

Kasus $sp\{x_1,x_2\} = sp\{y_1,y_2\}$. Misalkan $\{u_1,u_2\}$ basis ortonormal dari $sp\{x_1,x_2\}$. Karena $sp\{x_1,x_2\} = sp\{y_1,y_2\}$, maka $\{u_1,u_2\}$ juga basis ortonornal dari $sp\{y_1,y_2\}$. Dengan demikian,

$$x_1 = \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2 \quad \ldots(9)$$

$$x_2 = \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2 \quad \ldots(10)$$

$$y_1 = \delta_{11}u_1+\delta_{12}u_2 \quad \ldots(11)$$

$$y_2 = \delta_{21}u_1+\delta_{22}u_2 \quad \ldots(12)$$

untuk suatu $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{21},\lambda_{22},\delta_{11},\delta_{12},\delta_{21},\delta_{22}\in\mathbb{R}$. Dengan mensubstitusikan persamaan (9) dan (10) ke

$$\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle \end{vmatrix},$$

didapatkan $\langle x_1,x_2|x_1,x_2\rangle_s = (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})^2$. Demikian pula dengan mensubstitusikan persamaan (9) dan (10) ke

$$\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle y_1,y_1\rangle & \langle y_1,y_2\rangle \\ \langle y_2,y_1\rangle & \langle y_2,y_2\rangle \end{vmatrix}$$

didapatkan $\langle y_1,y_2|y_1,y_2\rangle_s = (\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})^2$. Jadi, $\|x_1,x_2\|=|\lambda_{11},\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}|$ dan $\|y_1,y_2\| = |\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|$.

Selain itu perhatikan bahwa sudut kanonik antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$ adalah $\cos\theta_1 = \langle u_1,u_1\rangle = 1$ dan $\cos\theta_2 = \langle u_2,u_2\rangle$. Dengan demikian,

$$\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s = \begin{vmatrix} \langle x_1,y_1\rangle & \langle x_1,y_2\rangle \\ \langle x_2,y_1\rangle & \langle x_2,y_2\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}u_2\rangle & \langle \lambda_{11}u_1+\lambda_{12}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}u_2\rangle \\ \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{11}u_1+\delta_{12}u_2\rangle & \langle \lambda_{21}u_1+\lambda_{22}u_2,\delta_{21}u_1+\delta_{22}u_2\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{11}\delta_{11}+\lambda_{12}\delta_{12} & \lambda_{11}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{22} \\ \lambda_{21}\delta_{11}+\lambda_{22}\delta_{12} & \lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{22}\delta_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_{11}\delta_{11}+\lambda_{12}\delta_{12})(\lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{22}\delta_{22})-(\lambda_{11}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{22})(\lambda_{21}\delta_{11}+\lambda_{22}\delta_{12})$$

$$= \lambda_{11}\delta_{11}\lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{11}\delta_{11}\lambda_{22}\delta_{22}+\lambda_{12}\delta_{12}\lambda_{21}\delta_{21}+\lambda_{12}\delta_{12}\lambda_{22}\delta_{22}-\lambda_{11}\delta_{21}\lambda_{21}\delta_{11}-\lambda_{11}\delta_{21}\lambda_{22}\delta_{12}-\lambda_{12}\delta_{22}\lambda_{21}\delta_{11}-\lambda_{12}\delta_{22}\lambda_{22}\delta_{12}$$

$$= (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})$$

$$= (\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

Jadi,

$$|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s| = |\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}||\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}|\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$= \|x_1,x_2\|\|y_1,y_2\|\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

Sebagaimana disebutkan dalam [3], $\prod_{i=1}^{j}\cos\theta_i$ nilai dapat dipandang sebagai nilai *cosinus* sudut antara $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$. Berdasarkan pengertian itu, teorema di atas mengatakan bahwa nilai $|\langle x_1,x_2|y_1,y_2\rangle_s|$ dapat dipandang sebagai perkalian dari luas jajargenjang yang dibangun $\{x_1,x_2\}$, luas jajargenjang yang dibangun oleh $\{y_1,y_2\}$ dan *cosinus* sudut antar subruang $sp\{x_1,x_2\}$ dan $sp\{y_1,y_2\}$. Dengan demikian teorema di atas menunjukkan perluasan langsung hasil yang berlaku di ruang hasil kali dalam.

4. PENUTUP

Dalam tulisan ini telah ditunjukkan bahwa persamaan $|\langle u,v\rangle|=\|u\|\|v\|\cos\theta$ yang berlaku di ruang hasil kali dalam memiliki padanan di ruang hasil kali dalam-2 yang diperumum standar. Pertanyaan lebih lanjut yang menarik untuk dikaji adalah apakah persamaan itu juga memiliki padanan di sebarang ruang hasil kali dalam-n yang diperumum.

DAFTAR PUSTAKA

Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. New York: W.H Freeman and Company. [1]

Utasari, Fatihah. 2010. "Hubungan Antara dua Subruang". *Tesis.* ITB. [2]

Gunawan, H., dan O. Neswan. 2005. *On Angles Between Subspaces of Inner ProductSpaces*, J.Indones. Math. Soc. 11. [3]

Mio, J., and A. Ben-Israel. 1992. *On Principal Angles Between Subspaces in* $\mathbb{R}^n$. Linear Algebra and Its Application, 171, P. 81-98. [4]

Trencevski, K., and R Melceski. 2006. "On Generalized n-Inner Product and The Corresponding Cauchy-Schwarz Inequality". *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* 7(2) (Art.53). [5]

Astuti, P. 2013. "Riesz Representation Theorem on Generalized n-inner Product Spaces". *International Journal on Mathematics Analysis,* 7(17-20). P. 873-882. [6]

Roman, Steven. 2008. "Advanced Linear Algebra 3ed". *Springer Science + Business Media.*