JUMLAH GRUP BAGIAN DALAM DARAB LANGSUNG GRUP SIKLIS BERHINGGA

M.V. Any Herawati

Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma
Alamat korespondensi: Kampus III Paingan Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta.
Email: *any69@usd.ac.id*

ABSTRACT

The problem that will be investigated in this study is the answer of the question on the number of subgroups in a direct product of finite cyclic groups. The answer of this question is generally not easy. A number of authors have counted subgroups in certain classes of finite groups. Joseph Petrillo in his paper entitled 'Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups', in The College Mathematics Journal, *Vol.42, No.3, 2011 contributed his idea to the case of a direct product of finite cyclic groups. This researh is a literature study of the Joseph Petrillo's paper.*

For a finite group G with subgroup lattice L(G), let | L(G)| denote the number of subgroups of G. Let $\mathbb{Z}_n$ denote the unique cyclic group of order n, which can be viewed as the group of integers under adition modulo n. Our goal is to derive a formula for calculating $|L(Z_m x Z_n)|$ for all positive integers m and n. The main tool is a theorem of Goursat, which we introduce next. First, we analyze the cases where m and n are relatively prime and powers of the same prime. Then, we extend the results to the direct product of arbitrary cyclic and non-cyclic groups.

***Key words**: Group, Cyclic group, Order of a grup, Goursat's theorem.*

1. PENDAHULUAN

Pengalaman di kelas, apabila mahasiswa diminta mencari grup bagian dari suatu darab langsung grup *G*x*H*, biasanya adalah dengan cara mencari grup bagian *A* dari *G* dan grup bagian *C* dari *H* lalu dibentuk *A*x*C* sebagai grup bagian dari *G*x*H*. Atau kalau tidak, dipilih diagonal dari *G*x*G*, yaitu $D=\{(g,g)\mid g\in G\}$ yang merupakan grup bagian dari *G*x*G*. Padahal secara umum masih ada grup bagian yang lainnya lagi. Sebagai contoh, misalkan Z_3= {0,1,2} dan perhatikan darab langsung Z_3xZ_3, maka dapat diperiksa bahwa himpunan {(0,0), (1,2), (2,1)} merupakan grup bagian dari Z_3xZ_3 yang bukan merupakan darab langsung grup bagian dan bukan pula grup bagian diagonal. Sehingga muncul pertanyaan ada berapa grup bagian dari Z_3xZ_3 seluruhnya?

Pada tahun 1889, Edouard Goursat (1858-1936) membuktikan teorema yang menggambarkan struktur grup bagian dari darab langsung G_1xG_2 dalam hubungannya dengan kuosien dalam G_1 dan G_2. Yang dimaksud kuosien dalam grup *G* adalah grup faktor *A/B* di mana *A* adalah grup bagian dari *G* dan *B* adalah grup bagian normal dari *A*. Teorema Goursat tersebut tepatnya menyatakan bahwa bila *G* dan *H* adalah grup, maka terdapat bijeksi antara himpunan *S* yang memuat semua grup bagian dari *G*x*H* dan himpunan *T* yang terdiri dari semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana *A/B* adalah kuosien dalam *G*, *C/D* adalah kuosien dalam *H*, dan $\varphi: A/B \to C/D$ adalah isomorfisma. Atau secara singkat, Teorema Goursat menyatakan bahwa struktur grup bagian dari suatu darab langsung bergantung pada struktur kuosien dari grup-grup faktornya. Penting diperhatikan bahwa, selain isomorfisma identitas, isomorpisma yang lain mungkin ada antara kuosien-kuosien yang tak trivial, masing-masing bersesuaian dengan satu grup bagian dalam darab langsung. Itulah alasan mengapa Z_3xZ_3

mempunyai grup bagian yang tidak dapat diperoleh dari darab langsung grup-grup bagian maupun dari diagonalnya Z_3xZ_3. Dan bila diselesaikan menggunakan Teorema Goursat diperoleh bahwa banyaknya grup bagian dari Z_3xZ_3 seluruhnya ada 6, yang secara teknis mencarinya adalah sebagai berikut. Pertama, dicari semua grup bagian dari Z_3, yaitu grup bagian {0} dan Z_3 sendiri. Dari kedua grup bagian tersebut dibentuk grup–grup kuosien {0}/{0}, Z_3/Z_3, dan $Z_{3/}${0}, yang ordenya berturut-turut adalah 1, 1, dan 3. Selanjutnya, dicari semua isomorfisma dari kuosien-kuosien yang berorde sama.

Isomorfisma dari {0}/{0} ke {0}/{0}. (1)

Karena |{0}/{0}|=1, maka hanya ada satu automorfisma dari {0}/{0}, yaitu automorfisma yang memasangkan koset $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian trivial dari , yaitu {(0,0)}.

Isomorfisma dari {0}/{0} ke Z_3/Z_3. (2)

Karena |{0}/{0}|=|Z_3/Z_3|=1 berarti $\{0\}/\{0\} \approx Z_3/Z_3 \approx Z_1$.

Karena |Aut(Z_3)|=1 berarti hanya ada satu isomorfisma dari {0}/{0} ke Z_3/Z_3 yaitu yang memetakan $0+\{0\} \mapsto 0+Z_3 = 1+Z_3 = 2+Z_3$. Dari isomorfisma ini dihasilkan grup bagian {(0,0),(0,1),(0,2)}={0}xZ_3.

Isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke {0}/{0}. (3)

Karena |Z_3/Z_3|=|{0}/{0}|=1, berarti $Z_3/Z_3 = \{0\}/\{0\} \approx Z_1$.

Karena |Aut(Z_3)|=1 berarti hanya ada satu isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke {0}/{0} yaitu yang memetakan $0+Z_3$ = $1+Z_3$ = $2+Z_3 \mapsto 0+\{0\}$. Dari isomorfisma ini dihasilkan grup {(0,0),(1,0),(2,0)}= Z_3x{0}.

Isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke Z_3/Z_3. (4)

Karena |Z_3/Z_3|=1, maka $Z_3/Z_3 \approx Z_1$ dan hanya ada satu automorfisma dari Z_1, sehingga automorfisma dari Z_3/Z_3 hanya ada satu pula, yaitu yang memetakan dan dari pemetaan ini dihasilkan grup bagian {(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)}=Z_3/Z_3.

Isomorfisma dari /{0} ke /{0}. (5)

Karena |Z_3/{0}|=3, maka $Z_3/\{0\} \approx Z_3$. Karena ada 2 automorfisma dari Z_3, maka automorfisma dari Z_3/{0} ada 2 pula, yaitu:

a) Yang memetakan $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$, $1+\{0\} \mapsto 1+\{0\}$, $2+\{0\} \mapsto 2+\{0\}$. Dari sini dihasilkan grup bagian {(0,0), (1,1), (2,2)}.
b) Sedangkan automorfisma yang satunya adalah yang memetakan $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$, $1+\{0\} \mapsto 2+\{0\}$, $2+\{0\} \mapsto 1+\{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian {(0,0), (1,2), (2,1)}.

Dari uraian di atas diperoleh bahwa grup bagian dari Z_3xZ_3 seluruhnya ada 6, yaitu {(0,0)}, {0}xZ_3, Z_{3x}{0}, Z_3xZ_3, {(0,0), (1,1), (2,2)}, dan {(0,0), (1,2), (2,1)}.

Seperti yang diperlihatkan melalui contoh di atas bahwa Teorema Goursat tidak menyediakan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup *G*x*H* tetapi lebih pada bagaimana mengonstruksi semua grup bagian dari *G*x*H*. Sedangkan penelitian ini bertujuan membahas secara detail tulisan Joseph Petrillo yang berjudul '*Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups.*' dalam *The College Mathematics Journal*, 2011, tentang penurunan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dalam darab langsung dari grup siklis berhingga.

2. LANDASAN TEORI

Berikut ini adalah konsep-konsep dan teorema-teorema yang berkaitan dengan masalah yang akan diteliti.

Definisi 1. Suatu **grup** (*G*,*) adalah suatu himpunan *G*, yang tertutup terhadap operasi biner *, sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Untuk semua $a,b,c \in G$, $(a*b)*c=a*(b*c)$. **sifat asssosiatif,**
2. Ada elemen $e \in G$ sedemikian hingga untuk semua $x \in G$. **elemen identitas** *e* untuk *,
3. Untuk setiap $a \in G$, ada elemen $a \in G$ sedemikian hingga $a*a=a*a=e$ **invers** *a* dari *a*.

Definisi 2. Suatu grup *G* dikatakan **Abel** bila operasi binernya bersifat komutatif.

Definisi 3. Bila suatu himpunan bagian *H* dari suatu grup *G* tertutup terhadap operasi biner dari *G* dan bila *H* sendiri adalah grup terhadap operasi yang diinduksi dari *G*, maka *H* disebut **grup bagian** dari *G*.

Teorema 1. Misal G adalah grup dan misal $a \in G$. Maka $H=\{a^n | n \in Z\}$ adalah grup bagian dari G dan merupakan grup bagian terkecil dari G yang memuat a, artinya setiap grup bagian yang memuat a pasti memuat H.

Definisi 4. Misal G adalah grup dan $a \in G$. Maka grup bagian $\{a^n | n \in Z\}$ dari G disebut **grup bagian siklis yang dibangun oleh *a***, dan dinotasikan dengan $<a>$.

Definisi 5. Misal a adalah elemen dari grup G. Bila grup bagian siklis $<a>$ dari G adalah berhingga, maka **orde dari** a adalah orde $| <a> |$ dari grup bagian siklis tersebut.

Teorema 2. Bila a dan b adalah relatif prima, maka ada bilangan bulat m dan n sedemikian hingga $ma+nb=1$.

Teorema 3. Bila a relatif prima terhadap b, dan $a|bc$, maka $a|\ c$.

Teorema 4. Setiap bilangan bulat positif $a>1$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $a=p_1^{a_1}p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ dengan $p_1>p_2> \dots p_n>$ adalah bilangan-bilangan prima dan masing-masing $a_1> 0$.

Teorema 5. Bila H adalah himpunan bagian berhingga tak kosong dari grup G, dan H tertutup terhadap perkalian, maka H adalah grup bagian dari G.

Untuk kardinalitas dari himpunan X digunakan notasi $|X|$. Begitu pula untuk orde dari elemen a dari suatu grup, digunakan notasi $|a|$.

Teorema 6. Bila G adalah grup berhingga, dan H adalah grup bagian dari G, maka $|H|$ adalah pembagi dari $|G|$.

Teorema 7. Bila G adalah grup berhingga dan $a \in G$, maka $|a| \mid |G|$.

Teorema 8. Bila H dan K adalah grup bagian dari grup Abel G, maka HK adalah grup bagian dari G.

Teorema 9. Bila H dan K adalah grup bagian berhingga dari G, maka

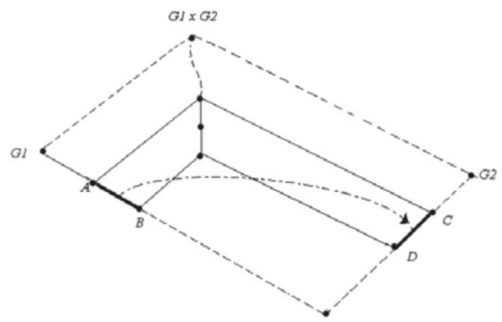
$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Teorema 1 (Teorema Goursat). Misal G_1 dan G_2 adalah grup. Maka terdapat bijeksi antara himpunan semua grup bagian dari $G_1 x G_2$ dan himpunan semua tripel $(A/B,\ C/D,\ \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien dalam G_1, C/D adalah kuosien dalam G_2, dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma.

Bukti dari teorema Goursat tersebut dapat dilihat dalam [3] atau [4]. Dalam tulisan tersebut ditunjukkan bagaimana cara membentuk gup bagian U dari $G_1 x G_2$ dari dua kuosien isomorfis yang diberikan, dan sebaliknya. Gambar 1 memperlihatkan hubungan antara U dan kuosien-kuosien yang bersesuaian dengan U. Di sini A dan B adalah grup bagian dari G_1 dan C dan D adalah grup bagian dari G_2, dan kuosien antara A/B dan C/D isomorfis melalui φ.

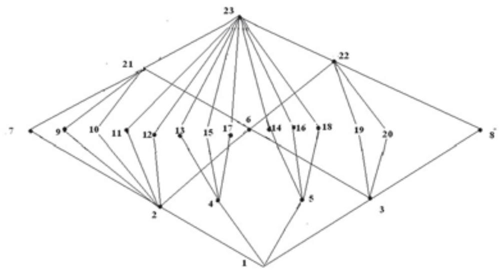
Di samping memberikan cara membentuk grup-grup bagian A/B dan C/D, teorema Goursat juga memberikan cara untuk mencari semua grup bagian dari $G_1 x G_2$. Bila kita dapat menentukan semua kuosien antara G_1 dan G_2, dan kemudian menentukan semua isomorfisma antara pasangan kuosien-kuosien yang isomorfis, maka kita dapat menghitung grup-grup bagian dari $G_1 x G_2$ dengan menghitung semua tripel $(A/B,\ C/D,\ \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien dalam G_1, C/D adalah kuosien dalam G_2, dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma.



Gambar 1. Visualisasi Grup bagian U dari Darab Langsung $G_1 x G_2$

Contoh 1. Grup bagian dari $Z_9 x Z_9$ yang bukan merupakan darab langsung dari grup-grup bagian dari Z_9 adalah $\{(0,0),(3,3),(6,6)\}$. Dengan teorema Goursat, grup bagian ini bersesuaian dengan tripel $(\langle 3\rangle/\langle 0\rangle, \langle 3\rangle/\langle 0\rangle, \varphi)$, di mana φ adalah automorfisma identitas pada $\langle 3\rangle/\langle 0\rangle\ (\cong Z_3)$ Karena hanya ada satu automorfisma yang lain (selain automorfisma identitas) dari Z_3, yaitu yang memetakan 0 ke 0, 1 ke 2, dan 2 ke 1, maka ada tepat satu grup bagian lain yang diperoleh dari pasangan kuosien ini, yaitu $\{(0,0),(6,3),(3,6)\}$.

Secara umum, setiap pasangan kuosien berorde satu, tiga, atau sembilan dalam $Z_9 x Z_9$ menghasilkan satu, dua, atau enam grup bagian, berturut-turut, sama dengan banyaknya automorfisma dari Z_1, Z_3, dan Z_9 Dakam Z_9, ada tiga kuosien berorde satu, dua kuosien berorde tiga, dan satu kuosien berdorde 9. Dengan Teorema Goursat, $Z_9 x Z_9$ mempunyai 3.3.1+2.2.2+1.1.6 = 23 grup bagian. Kisi grup bagian dari ditunjukkan dalam Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Kisi Grup Bagian Dari $Z_9 x Z_9$

Pendekatan yang dipakai dalam contoh ini menjadi dasar untuk menghitung jumlah grup bagian dari $Zp^r x Zp^r$, di mana p adalah bilangan prima. Pertama, diamati untuk kasus paling sederhana, yaitu ketika grup-grup faktor tersebut mempunyai orde relatif prima dan perkalian dari pangkat bilangan prima yang sama. Akhirnya, hasil tersebut diperluas untuk hasilkali langsung dari grup siklik dantak-siklik sebarang.

3.1 Menghitung Grup Bagian dari $Z_m x Z_n$ bila m dan n Relatif Prima

Teorema 2. Bila m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima, maka grup Z_m dan Z_n tidak mempunyai kuosien tak-trivial yang isomorfis.

Bukti. Andaikan Z_m dan Z_n mempunyai kuosien tak-trivial yang isomorfis, yaitu $A/B \approx C/D$, di mana A/B adalah kuosien tak trivial dari Z_m dan C/D adalah kuosien tak trivial dari Z_n. Karena A/B dan C/D tak trivial dan m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima, maka $|A/B|=|C/D|=k$. Misal $|A/B|=|C/D|=k$ maka dengan Teorema Lagrange diperoleh:

$$\left|A/B\right| = \frac{|A|}{|B|} = k \Leftrightarrow |A| = k|B|$$

dan

$$\left|C/D\right| = \frac{|A|}{|B|} = k \Leftrightarrow |C| = k|D|.$$

Berarti k membagi $|A|$ sedangkan k membagi Z_m. Akibatnya k membagi m. Dan k membagi $|C|$ sedangkan k membagi Z_n. Akibatnya k membagi n. Karena k membagi m dan k membagi n, akibatnya k membagi fpb(m,n)=1 Jadi k=1, yang berarti muncul kontradiksi.

Menurut Teorema Goursat, setiap grup bagian dari $Z_m x Z_n$ berpadanan dengan suatu tripel (A/A, C/X, φ), di mana $A<Z_m$, $C<Z_n$, dan φ adalah isomorfisma identitas. Ini berarti bahwa setiap grup bagian dari $Z_m x Z_n$ mempunyai bentuk AxC, dan dari sini kisi grup bagian dari $Z_m x Z_n$ adalah darab Kartesius dari Z_m dan Z_n.

Teorema 3. Misal m dan n adalah dua bilangan bulat positif yang relatif prima, dengan faktorisasi prima $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = q_1^{t_1} \dots q_k^{t_1}$. Maka banyaknya grup bagian dari adalah

$$d(m)d(n) = \prod_{i=1}^{k}(r_i+1)\prod_{j=1}^{l}(r_j+1).$$

Bukti. Karena setiap grup bagian dari Z_m berbentuk Z_a, di mana a membagi n. Dengan kata lain, $|L(Z_m)| = d(n)$, di mana d (n) adalah banyaknya pembagi dari n. Hasil utama dari bagian ini adalah berdasar fakta bahwa bila faktorisasi prima dari bilangan bulat positif m adalah $p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$, maka banyaknya pembagi dari m adalah

$$d(m) = \prod_{i=1}^{k}(r_i+1).$$

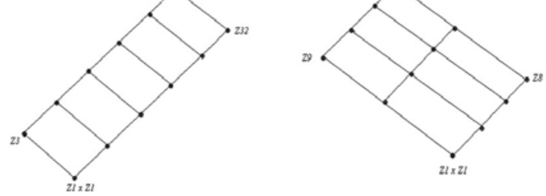
Akibatnya, banyaknya grup bagian dari $Z_m x Z_n$**,** yaitu

$$|L(Z_m x Z_n)| = d(m)d(n) = \prod_{i=1}^{k}(r_i+1)\prod_{j=1}^{l}(r_j+1)$$

Berikut ini adalah kasus khusus dari Teorema 3 bila m dan n berupa pangkat dari bilangan-bilangan prima.

Teorema 4. Bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka banyaknya grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{q^t}$ adalah $(r+1)(t+1)$.

Bukti. Merupakan akibat langsung dari Teorema 3 dengan $m=p^r$ dan $n=q^r$.



Gambar 3. Kisi Grup Bagian dari $Z_3 x Z_{32}$ dan $Z_9 x Z_8$

Contoh 2. Grup $Z_{27} x Z_4$ dan $Z_9 x Z_8$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian dan kisi grup bagiannya saling isomorfis. Meskipun kisi grup bagian dari $Z_3 x Z_{32}$ tidak isomorfis dengan kedua kisi tersebut, grup ini juga mempunyai 12 grup bagian. (Gambar 3). Secara umum, bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka grup $Z_p x Z_{q^5}$ dan $Z_{p^2} x Z_{q^3}$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian, namun kisi grup bagiannya tidak isomorfis. (Lampiran 2)

3.2 Menghitung Grup Bagian dari $Z_{p^r} x Z_{p^s}$, dimana p adalah Bilangan Prima dan $r \leq s$

Dalam bagian ini kita mengamati secara khusus darab langsung $Z_{p^r} x Z_{p^s}$, di mana p adalah bilangan prima dan $r \leq s$. Tujuan utamanya adalah menghitung grup-grup bagian yang berpadanan dengan tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ untuk kuosien-kuosien tertentu A/B dan C/D, yang keduanya isomorfis dengan Z_{p^k}, $0 \leq k \leq r$, di mana φ mencakup semua automorfisma dari Z_{p^k}.

Karena LZ_{p^r} adalah rantai, mempunyai r+1 grup bagian (kuosien berorde 1), r kuosien berorde p, r–1 kuosien berorde p^2, dan seterusnya. Secara umum, Z_{p^r} mempunyai r–k+1 kuosien berorde , $0 \leq k \leq r$. Selanjutnya, menghitung automorfisma dari suatu grup siklis adalah ekivalen dengan menghitung banyaknya pembangun. Dengan menggunakan fungsi totient Euler pada p^k, diperoleh bahwa Z_{p^k} memponyai p^k-p^{k-1} automorfisma bila $k>0$, dan mempunyai satu automorfisma bila $k=0$.

Sekarang, untuk setiap kuosien berorde p^k, $k>0$, kita dapat memilih kuosien dalam Z_{p^r} dalam r–k+1 xara, memilih kuosien dalam Z_{p^s} dalam s–k+1 xara, dan kemudian memilih isomorphism dalam p^k-p^{k-1} cara. Untuk $k=0$, banyaknya grup bagian adalah $(r+1)(s+1)$, dan untuk $0.<k \leq r$, banyaknya grup bagian adalah $(r-k+1)(s-k+1)(p^k-p^{k-1})$. Maka, total jumlah grup bagian dari $Z_{p^r} x Z_{p^s}$ adalah

$$(r+1)(s+1)+\sum_{k=1}^{r}(r-k+1)(s-k+1)(p^k-p^{k-1}),$$

yang dapat dijelaskan dengan beberapa langkah berikut:

$$|L(Z_{p^r} x Z_{p^s})|$$

$$=(r+1)(s+1)+\sum_{k=1}^{r}(r-k+1)(s-k+1)(p^k-p^{k-1})$$

$$=(r+1)(s+1)+\sum_{k=1}^{r}(r-k+1)(s-k+1)p^k$$

$$-(r+1)(s+1)+\sum_{k=1}^{r}(r-k+1)(s-k+1)p^{k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{r}(r-k+1)(s-k+1)p^k-\sum_{k=0}^{r}(r-k)(s-k)p^k$$

$$=\sum_{k=0}^{r}[(r-k+1)(s-k+1)-(r-k)(s-k)]p^k$$

$$=\sum_{k=0}^{r}[(r-k)(s-k)+(r+s+1)-2k-(r-k)(s-k)]p^k$$

$$=\sum_{k=0}^{r}[(r+s+1)-2k]p^k$$

$$=(r+s+1)\sum_{k=0}^{r}p^k-2\sum_{k=1}^{r}kp^k \qquad (6)$$

Jumlahan yang pertama adalah deret geometrik berhingga,

$$\sum_{k=1}^{r}p^k=\frac{p^{r+1}-1}{p-1} \,..$$

Jumlahan yang kedua dapat dihitung dengan lebih dulu mengamati bahwa

$$(p-1)\sum_{k=1}^{r}kp^k.=\left(p\sum_{k=1}^{r}kp^k\right)-\left(\sum_{k=1}^{r}kp^k\right)$$

$$=\left(rp^{r+1}+p\sum_{k=1}^{r-1}kp^k\right)-\left(p+p\sum_{k=1}^{r-1}(k+1)p^k\right)$$

$$=rp^{r+1}-p+p\left(\sum_{k=1}^{r-1}kp^k-\sum_{k=1}^{r-1}(k+1)p^k\right)$$

$$=rp^{r+1}-p+p\sum_{k=1}^{r-1}[kp^k-(k+1)p^k]$$

$$=rp^{r+1}-p\sum_{k=0}^{r-1}p^k$$

$$=rp^{r+1}-p\left(\frac{p^r-1}{p-1}\right)$$

dan kemudian dengan membagi dengan p–1 diperoleh

$$\sum_{k=1}^{r}kp^k.=\frac{rp^{r+1}}{p-1}-\frac{p^{r+1}-p}{(p-1)^2}.$$

Selelah mensubstitusikan ke (6) diperoleh

$$|LZ_{p^r} x Z_{p^s}|=$$

$$(r+s+1)\left(\frac{p^{r+1}-1}{p-1}\right)-2\left(\frac{rp^{r+1}}{p-1}-\frac{p^{r+1}-p}{(p-1)^2}\right)$$

Dengan beberapa penyederhanaan diperoleh hasil sebagai berikut:

Teorema 5. *Bila p adalah bilangan prima, dan r dan s adalah bilangan bulat tak-negatif sedemikian hingga $r \le s$, maka banyaknya grup bagian dari $Z_{p^r} \mathrm{x} Z_{p^s}$ adalah*

$$\frac{p^{r+1}[(s-r+1)(p-1)+2]-[(s-r+3)(p-1)+2}{(p-1)^2}.$$

Bukti. Dari uraian dalam paragraf di atas dan beberapa substitusi aljabar diperoleh bahwa

$$|L Z_{p^r} \mathrm{x} Z_{p^s}| =$$

$$(r+s+1)\left(\frac{p^{r+1}-1}{p-1}\right)-2\left(\frac{rp^{r+1}}{p-1}-\frac{p^{r+1}-p}{(p-1)^2}\right)$$

$$= \frac{(r+s+1)(p-1)(p^{r+1}-1)}{(p-1)^2} - \frac{2r(p-1)p^{r+1}}{(p-1)^2} + 2\frac{(p^{r+1}-p)}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{(r+s+1)(p-1)p^{r-1} - 2r(p-1)p^{r+1} + 2p^{r+1} - (r+s+1)p + (r+s+1) - 2p}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+1+2)p + (r+s+1)}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+3)p + (r+s+1)}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+3)p + (r+s+3)-2}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - [(r+s+3)(p-1)+2]}{(p-1)^2}$$

3.3 Jumlah Grup Bagian dari $Z_m \mathrm{x} Z_n$ untuk Sebarang m dan n

Perhatikan grup $Z_m \mathrm{x} Z_n$ dan andaikan bahwa m≠1≠n. Bila $p_1, p_2, ..., p_k$ adalah bilangan-bilangan prima yang saling berbeda dan membagi hasilkali mn, maka m dan n dapat difaktorkan sebagai $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{r_k}$, di mana r_i dan s_i adalah bilangan bulat tak negatif dan mungkin sama dengan nol pada paling banyak satu dalam dekomposisi untuk m dan n. Dengan Teorema Fundamental dari grup Abel berhingga $Z_m \mathrm{x} Z_n$ dapat didekomposisikan menjadi

$$Z_m \mathrm{x} Z_n \cong \left(Z_{p1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p1^{s1}}\right) \mathrm{x} \dots \mathrm{x} \left(Z_{pk^{rk}} \mathrm{x} Z_{pk^{sk}}\right). \quad (7)$$

Pada tahun 1951, Suzuki [6] membuktikan teorema yang dapat digunakan untuk menghasilkan generalisasi Teorema 3.

Teorema 6 (Teorema Suzuki). Misal G_1 dan G_2 adalah grup berhingga. Maka $L(G_1 \mathrm{x} G_2) = L(G_1) \mathrm{x} L(G_2)$ dan $|L(G_1 \mathrm{x} G_2)| = |L(G_1)|.|L(G_2)|$ bila dan hanya bila $|(G_1)|$ dan $|(G_2)|$ relatif prima.

Teorema 7. Misal m dan n adalah bilangan bulat positif, dan misal $p_1, p_2, ..., p_k$ adalah bilangan-bilangan prima saling berbeda yang membagi hasilkali mn sedemikian hingga $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{r_k}$. Maka

$$|L(Z_m \mathrm{x} Z_n)| = \prod_{i=1}^{k} |L\left(Z_{p1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p1^{s1}}\right)|.$$

Bukti. Dengan menerapkanTeorema Suzuki secara induktif ke persamaan (7).

Pangkal induksi, misal $m = p_1^{r_1}$ dan $n = p_1^{s_1}$,

maka $|L(Z_m \mathrm{x} Z_n)| = |L\left(Z_{p1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p1^{s1}}\right)|$

Langkah induksi

Andaikan untuk $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{r_k}$ berlaku

$$|L(Z_m \mathrm{x} Z_n)| = \prod_{i=1}^{k} |L\left(Z_{p1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p1^{s1}}\right)|$$

Akan dibuktikan jika $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k+1}^{r_{k+1}}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_{k+1}^{s_{k+1}}$, maka

$$|L(Z_m \mathrm{x} Z_n)| = \prod_{i=1}^{k+1} |L\left(Z_{p1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p1^{s1}}\right)|$$

Misal $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{r_k}$, maka

$$|L(Z_m \mathrm{x} Z_n)|$$

$$= |L((Z_{p_1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p_1^{s1}}) \mathrm{x} (Z_{p_2^{r2}} x Z_{p_2^{s2}}) \mathrm{x} \dots \mathrm{x} (Z_{p_k^{rk}} x Z_{p_k^{sk}}) \mathrm{x} (Z_{p_{k+1}^{rk+1}} \mathrm{x} Z_{p_{k+1}^{sk+1}})|$$

$$= |L((Z_{p_1^{r1}} \mathrm{x} Z_{p_1^{s1}}) \mathrm{x} (Z_{p_2^{r2}} \mathrm{x} Z_{p_2^{s2}}) \mathrm{x} \dots \mathrm{x} (Z_{p_k^{rk}} \mathrm{x} Z_{p_k^{sk}})|| L(Z_{p_{k+1}^{rk+1}} \mathrm{x} Z_{p_{k+1}^{sk+1}})|$$

$$= |L(Z_{p_1^{r1} p_2^{r2} \dots p_k^{rk}} \mathrm{x} Z_{p_1^{s1} p_2^{s2} \dots p_k^{sk}})| \; |L(Z_{p_{k+1}^{rk+1}} \mathrm{x} Z_{p_{k+1}^{sk+1}})|$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} |L(Z_{p_i^{ri}} x Z_{p_i^{si}})|\right) (|L(Z_{p_{k+1}^{rk+1}} \mathrm{x} Z_{p_{k+1}^{sk+1}}))$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} |L(Z_{p_i^{ri}} x Z_{p_i^{si}})|$$

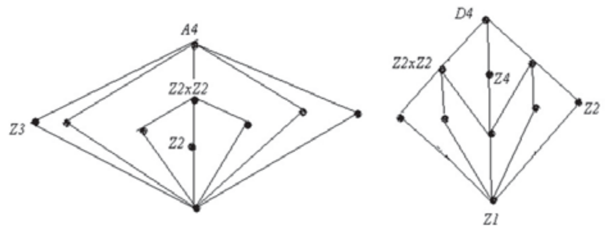
Setiap faktor dalam Teorema 7 dapat dihitung menggunakan Teorema 5.

Contoh 3. Karena $18 = 2.3^2$ dan $30 = 2.3.5$, maka $|L(Z_{18} \mathrm{x} Z_{30})| = |L(Z_2 \mathrm{x} Z_2)|.|L(Z_{32} \mathrm{x} Z_3)|.|L(Z_1 \mathrm{x} Z_5)| = 5.10.2 = 100$.

3.4 Menghitung Jumlah Grup Bagian dari Grup Berhingga Tak Siklik

Secara prinsip, untuk menghitung grup bagian dari hasilkali langsung dari sebarang grup berhingga G_1 dan G_2 adalah dengan Teorema Goursat, yang tentunya dibutuhkan informasi lebih tentang struktur dari G_1 dan G_2. Dalam prakteknya, untuk menghitung grup bagian dari $G_1 \mathrm{x} G_2$ pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat secara langsung daripada dengan rumus. Berikut adalah contohnya.

Contoh 4. Akan dihitung jumlah grup bagian dari hasil kali langsung A_4, grup alternating pada empat elemen, dan D_4, grup simetri dari persegi (Diagram Hassenya di Gambar 4). Orde dari A_4 adalah 12 yang mempunyai pembagi 1, 2, 3, 4, 6, dan12. Karena A_4 tidak mempunyai kuosien berorde 6 dan D_4 tidak mempunyai kuosien berorde 3 maupun 12, berarti cukup diperhatikan kuosien berorde 1, 2, dan 4. (Lampiran 3)



Gambar 4. Diagram Hasse dari A_4 dan D_4

Kuosien berorde 1. A_4 dan D_4 masing-masing mempunyai 10 kuosien berorde satu (yaitu dari sepuluh grup bagian), dan hanya ada satu automorfisma antara setiap pasang kuosien-kuosien tersebut. Dengan demikian, total jumlah grup bagian yang bersesuaian dengan kuosienberorde satu adalah 10.10.1=100.

Kuosien berorde 2. A_4 mempunyai 6 kuosien berorde dua, sedangkan D_4 mempunyai limabelas (Lampiran 3). Semua kuosien tersebut isomorfis dengan Z_2, yang hanya mempunyai satu automorfisma. Dengan demikian, ada 6 .15.1=90 grup bagian.

Kuosien berorde 4. A_4 mempunyai 1 kuosien berorde empat (Lampiran 3) yang isomorfis dengan grup 4-Klein $Z_2 \mathrm{x} Z_2$. (Bila Z_3 adalah sebarang grup bagian berorde 3 dalam A_4, maka A_4/Z_3 bukan kuosien karena Z_3 bukan grup bagian normal dari A_4). Di lain pihak, D_4 mempunyai 4 kuosien berorde empat, tapi salah satunya siklik, jadi mempunyai 3 kuosien yang isomorfis dengan grup 4-Klein. Karena $Aut(Z_2 \mathrm{x} Z_2) \approx S_3$, grup simetris pada 3 elemen, $Z_2 \mathrm{x} Z_2$ mempunyai 6 automorfisma, yang berarti jumlah total grup bagian dari $A_4 \mathrm{x} D_4$ yang bersesuaian dengan kuosien ini adalah 1.3.6=18.

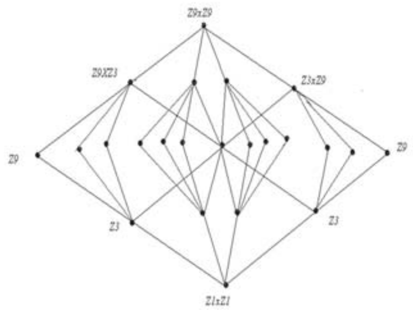
Berdasar pengamatan di atas $A_4 \mathrm{x} D_4$ mempunyai 100+90+18=208 grup bagian.

4. KESIMPULAN

Dari uraian di atas diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup siklis berhingga, yaitu:

1. Teorema 3 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya relatif prima.
2. Teorema 4 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan prima yang berbeda.

3. Teorema 5 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya merupakan pangkat dari bilangan prima yang sama.
4. Teorema 7 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan bulat positif sebarang.
5. Untuk darab langsung dari dua grup tak siklis pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat.
6. Selain itu, dari penelitian ini ditemukan ketidaksesuaian antara diagram kisi untuk grup bagian dari $Z_9 x Z_9$ yaitu Gambar 2 dengan yang ada di paper Joseph Petrillo dalam [5], yaitu:



Gambar 5. Diagram Kisi untuk Grup Bagian dari Dalam Paper Joseph Petrillo

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra,* 7th edition. Pearson Education, Inc.

Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra.* 7th edition. Boston: Houghton Mifflin.

Herawati, A. 2009. "Teorema Goursat: Konstruksi Subgrup dari Grup Darab Langsung". *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika,* UNY: FMIPA.

Petrillo, J. 2009. "Goursat's Other Theorem". *The College Mathematics Journal*, Vol.40, No.2 (2009) 119.

Petrillo, J. 2011. "Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups". *The College Mathematics Journal*, Vol.42, No.3 (2011) 215.

Suzuki, M. 1951. "On the Lattice of Subgroups of Finite Groups". *Transactions of The American Mathematical Society*, 70 (1951) 345–371.