

JUMLAH GRUP BAGIAN DALAM DARAB LANGSUNG GRUP SIKLIS BERHINGGA

M.V. Any Herawati

Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma
Alamat korespondensi: Kampus III Paingan Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta.
Email: any69@usd.ac.id

ABSTRACT

The problem that will be investigated in this study is the answer of the question on the number of subgroups in a direct product of finite cyclic groups. The answer of this question is generally not easy. A number of authors have counted subgroups in certain classes of finite groups. Joseph Petrillo in his paper entitled 'Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups', in The College Mathematics Journal, Vol.42, No.3, 2011 contributed his idea to the case of a direct product of finite cyclic groups. This research is a literature study of the Joseph Petrillo's paper.

For a finite group G with subgroup lattice $L(G)$, let $|L(G)|$ denote the number of subgroups of G . Let Z_n denote the unique cyclic group of order n , which can be viewed as the group of integers under addition modulo n . Our goal is to derive a formula for calculating $|L(Z_m \times Z_n)|$ for all positive integers m and n . The main tool is a theorem of Goursat, which we introduce next. First, we analyze the cases where m and n are relatively prime and powers of the same prime. Then, we extend the results to the direct product of arbitrary cyclic and non-cyclic groups.

Key words: Group, Cyclic group, Order of a group, Goursat's theorem.

1. PENDAHULUAN

Pengalaman di kelas, apabila mahasiswa diminta mencari grup bagian dari suatu darab langsung grup $G \times H$, biasanya adalah dengan cara mencari grup bagian A dari G dan grup bagian C dari H lalu dibentuk $A \times C$ sebagai grup bagian dari $G \times H$. Atau kalau tidak, dipilih diagonal dari $G \times G$, yaitu $D = \{(g, g) \mid g \in G\}$ yang merupakan grup bagian dari $G \times G$. Padahal secara umum masih ada grup bagian yang lainnya lagi. Sebagai contoh, misalkan $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ dan perhatikan darab langsung $Z_3 \times Z_3$, maka dapat diperiksa bahwa himpunan $\{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ merupakan grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ yang bukan merupakan darab langsung grup bagian dan bukan pula grup bagian diagonal. Sehingga muncul pertanyaan ada berapa grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya?

Pada tahun 1889, Edouard Goursat (1858-1936) membuktikan teorema yang menggambarkan struktur

grup bagian dari darab langsung $G_1 \times G_2$ dalam hubungannya dengan kuosien dalam G_1 dan G_2 . Yang dimaksud kuosien dalam grup G adalah grup faktor A/B di mana A adalah grup bagian dari G dan B adalah grup bagian normal dari A . Teorema Goursat tersebut tepatnya menyatakan bahwa bila G dan H adalah grup, maka terdapat bijeksi antara himpunan S yang memuat semua grup bagian dari $G \times H$ dan himpunan T yang terdiri dari semua triple $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien dalam G , C/D adalah kuosien dalam H , dan $\varphi: A/B \rightarrow C/D$ adalah isomorfisma. Atau secara singkat, Teorema Goursat menyatakan bahwa struktur grup bagian dari suatu darab langsung bergantung pada struktur kuosien dari grup-grup faktornya. Penting diperhatikan bahwa, selain isomorfisma identitas, isomorfisma yang lain mungkin ada antara kuosien-kuosien yang tak trivial, masing-masing bersesuaian dengan satu grup bagian dalam darab langsung. Itulah alasan mengapa $Z_3 \times Z_3$

mempunyai grup bagian yang tidak dapat diperoleh dari darab langsung grup-grup bagian maupun dari diagonalnya $Z_3 \times Z_3$. Dan bila diselesaikan menggunakan Teorema Goursat diperoleh bahwa banyaknya grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya ada 6, yang secara teknis mencarinya adalah sebagai berikut. Pertama, dicari semua grup bagian dari Z_3 , yaitu grup bagian $\{0\}$ dan Z_3 sendiri. Dari kedua grup bagian tersebut dibentuk grup-grup kuosien $\{0\}/\{0\}$, Z_3/Z_3 , dan $Z_3/\{0\}$, yang ordenya berturut-turut adalah 1, 1, dan 3. Selanjutnya, dicari semua isomorfisma dari kuosien-kuosien yang berorde sama.

Isomorfisma dari $\{0\}/\{0\}$ ke $\{0\}/\{0\}$. (1)

Karena $|\{0\}/\{0\}|=1$, maka hanya ada satu automorfisma dari $\{0\}/\{0\}$, yaitu automorfisma yang memasangkan koset $0 + \{0\} \mapsto 0 + \{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian trivial dari Z_3 , yaitu $\{(0,0)\}$.

Isomorfisma dari $\{0\}/\{0\}$ ke Z_3/Z_3 . (2)

Karena $|\{0\}/\{0\}|=|Z_3/Z_3|=1$ berarti $\{0\}/\{0\} \approx Z_3/Z_3 \approx Z_1$.

Karena $|\text{Aut}(Z_3)|=1$ berarti hanya ada satu isomorfisma dari $\{0\}/\{0\}$ ke Z_3/Z_3 yaitu yang memetakan $0 + \{0\} \mapsto 0 + Z_3 = 1 + Z_3 = 2 + Z_3$. Dari isomorfisma ini dihasilkan grup bagian $\{(0,0), (0,1), (0,2)\} = \{0\} \times Z_3$.

Isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke $\{0\}/\{0\}$. (3)

Karena $|Z_3/Z_3|=|\{0\}/\{0\}|=1$, berarti $Z_3/Z_3 \approx \{0\}/\{0\} \approx Z_1$.

Karena $|\text{Aut}(Z_3)|=1$ berarti hanya ada satu isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke $\{0\}/\{0\}$ yaitu yang memetakan $0 + Z_3 = 1 + Z_3 = 2 + Z_3 \mapsto 0 + \{0\}$. Dari isomorfisma ini dihasilkan grup $\{(0,0), (1,0), (2,0)\} = Z_3 \times \{0\}$.

Isomorfisma dari Z_3/Z_3 ke Z_3/Z_3 . (4)

Karena $|Z_3/Z_3|=1$, maka $Z_3/Z_3 \approx Z_1$ dan hanya ada satu automorfisma dari Z_1 , sehingga automorfisma dari Z_3/Z_3 hanya ada satu pula, yaitu yang memetakan dan dari pemetaan ini dihasilkan grup bagian $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\} = Z_3/Z_3$.

Isomorfisma dari $\{0\}/\{0\}$ ke $\{0\}/\{0\}$. (5)

Karena $|Z_3/\{0\}|=3$, maka $Z_3/\{0\} \approx Z_3$. Karena ada 2 automorfisma dari Z_3 , maka automorfisma dari $Z_3/\{0\}$ ada 2 pula, yaitu:

- Yang memetakan $0 + \{0\} \mapsto 0 + \{0\}$, $1 + \{0\} \mapsto 1 + \{0\}$, $2 + \{0\} \mapsto 2 + \{0\}$. Dari sini dihasilkan grup bagian $\{(0,0), (1,1), (2,2)\}$.
- Sedangkan automorfisma yang satunya adalah yang memetakan $0 + \{0\} \mapsto 0 + \{0\}$, $1 + \{0\} \mapsto 2 + \{0\}$, $2 + \{0\} \mapsto 1 + \{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian $\{(0,0), (1,2), (2,1)\}$.

Dari uraian di atas diperoleh bahwa grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya ada 6, yaitu $\{(0,0)\}$, $\{0\} \times Z_3$, $Z_3 \times \{0\}$, $Z_3 \times Z_3$, $\{(0,0), (1,1), (2,2)\}$, dan $\{(0,0), (1,2), (2,1)\}$.

Seperti yang diperlihatkan melalui contoh di atas bahwa Teorema Goursat tidak menyediakan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup $G \times H$ tetapi lebih pada bagaimana mengonstruksi semua grup bagian dari $G \times H$. Sedangkan penelitian ini bertujuan membahas secara detail tulisan Joseph Petrillo yang berjudul 'Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups.' dalam *The College Mathematics Journal*, 2011, tentang penurunan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dalam darab langsung dari grup siklis berhingga.

2. LANDASAN TEORI

Berikut ini adalah konsep-konsep dan teorema-teorema yang berkaitan dengan masalah yang akan diteliti.

Definisi 1. Suatu **grup** $(G, *)$ adalah suatu himpunan G , yang tertutup terhadap operasi biner $*$, sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- Untuk semua $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$. **sifat assosiatif**,
- Ada elemen $e \in G$ sedemikian hingga untuk semua $x \in G$. **elemen identitas** e untuk $*$,
- Untuk setiap $a \in G$, ada elemen $a \in G$ sedemikian hingga $a * a = a * a = e$ **invers** a dari a .

Definisi 2. Suatu grup G dikatakan **Abel** bila operasi binernya bersifat komutatif.

Definisi 3. Bila suatu himpunan bagian H dari suatu grup G tertutup terhadap operasi biner dari G dan bila H sendiri adalah grup terhadap operasi yang diinduksi dari G , maka H disebut **grup bagian** dari G .

Teorema 1. Misal G adalah grup dan misal $a \in G$. Maka $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ adalah grup bagian dari G dan merupakan grup bagian terkecil dari G yang memuat a , artinya setiap grup bagian yang memuat a pasti memuat H .

Definisi 4. Misal G adalah grup dan $a \in G$. Maka grup bagian $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ dari G disebut **grup bagian siklis yang dibangun oleh a** , dan dinotasikan dengan $\langle a \rangle$.

Definisi 5. Misal a adalah elemen dari grup G . Bila grup bagian siklis $\langle a \rangle$ dari G adalah berhingga, maka **orde dari a** adalah orde $|\langle a \rangle|$ dari grup bagian siklis tersebut.

Teorema 2. Bila a dan b adalah relatif prima, maka ada bilangan bulat m dan n sedemikian hingga $ma + nb = 1$.

Teorema 3. Bila a relatif prima terhadap b , dan $a|bc$, maka $a|c$.

Teorema 4. Setiap bilangan bulat positif $a > 1$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ dengan $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ adalah bilangan-bilangan prima dan masing-masing $a_i > 0$.

Teorema 5. Bila H adalah himpunan bagian berhingga tak kosong dari grup G , dan H tertutup terhadap perkalian, maka H adalah grup bagian dari G .

Untuk kardinalitas dari himpunan X digunakan notasi $|X|$. Begitu pula untuk orde dari elemen a dari suatu grup, digunakan notasi $|a|$.

Teorema 6. Bila G adalah grup berhingga, dan H adalah grup bagian dari G , maka $|H|$ adalah pembagi dari $|G|$.

Teorema 7. Bila G adalah grup berhingga dan $a \in G$, maka $|a| \mid |G|$.

Teorema 8. Bila H dan K adalah grup bagian dari grup Abel G , maka HK adalah grup bagian dari G .

Teorema 9. Bila H dan K adalah grup bagian berhingga dari G , maka

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

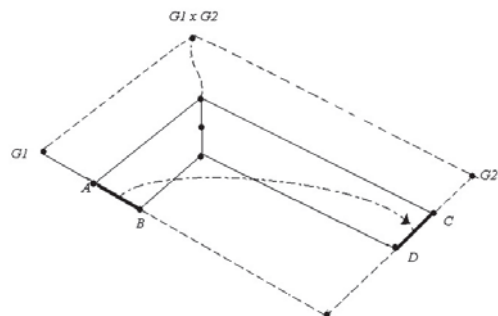
3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Teorema 1 (Teorema Goursat). Misal G_1 dan G_2 adalah grup. Maka terdapat bijeksi antara himpunan semua grup bagian dari $G_1 \times G_2$ dan himpunan semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien

dalam G_1 , C/D adalah kuosien dalam G_2 , dan $\varphi: A/B \rightarrow C/D$ adalah isomorfisma.

Bukti dari teorema Goursat tersebut dapat dilihat dalam [3] atau [4]. Dalam tulisan tersebut ditunjukkan bagaimana cara membentuk grup bagian U dari $G_1 \times G_2$ dari dua kuosien isomorfis yang diberikan, dan sebaliknya. Gambar 1 memperlihatkan hubungan antara U dan kuosien-kuosien yang bersesuaian dengan U . Di sini A dan B adalah grup bagian dari G_1 dan C dan D adalah grup bagian dari G_2 , dan kuosien antara A/B dan C/D isomorfis melalui φ .

Di samping memberikan cara membentuk grup-grup bagian A/B dan C/D , teorema Goursat juga memberikan cara untuk mencari semua grup bagian dari $G_1 \times G_2$. Bila kita dapat menentukan semua kuosien antara G_1 dan G_2 , dan kemudian menentukan semua isomorfisma antara pasangan kuosien-kuosien yang isomorfis, maka kita dapat menghitung grup-grup bagian dari $G_1 \times G_2$ dengan menghitung semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana A/B adalah kuosien dalam G_1 , C/D adalah kuosien dalam G_2 , dan $\varphi: A/B \rightarrow C/D$ adalah isomorfisma.

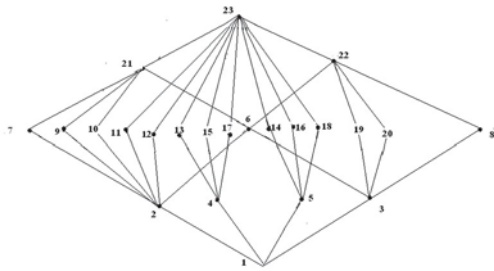


Gambar 1. Visualisasi Grup bagian U dari Darab Langsung $G_1 \times G_2$

Contoh 1. Grup bagian dari $Z_9 \times Z_9$ yang bukan merupakan darab langsung dari grup-grup bagian dari Z_9 adalah $\{(0,0), (3,3), (6,6)\}$. Dengan teorema Goursat, grup bagian ini bersesuaian dengan tripel $(\langle 3 \rangle / \langle 0 \rangle, \langle 3 \rangle / \langle 0 \rangle, \varphi)$, di mana φ adalah automorfisma identitas pada $\langle 3 \rangle / \langle 0 \rangle (\cong Z_3)$. Karena hanya ada satu automorfisma yang lain (selain automorfisma identitas) dari Z_3 , yaitu yang memetakan 0 ke 0, 1 ke 2, dan 2 ke 1, maka ada tepat satu grup bagian lain yang diperoleh dari pasangan kuosien ini, yaitu $\{(0,0), (6,3), (3,6)\}$.

Secara umum, setiap pasangan kuosien berorde satu, tiga, atau sembilan dalam $Z_9 \times Z_9$ menghasilkan satu, dua, atau enam grup bagian, berturut-turut, sama dengan banyaknya automorfisma dari Z_1 , Z_3 , dan Z_9 . Dalam Z_9 , ada tiga kuosien berorde satu, dua kuosien

berorde tiga, dan satu kuosien berorde 9. Dengan Teorema Goursat, $Z_9 \times Z_9$ mempunyai $3.3.1+2.2.2+1.1.6 = 23$ grup bagian. Kisi grup bagian dari ditunjukkan dalam Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Kisi Grup Bagian Dari $Z_9 \times Z_9$

Pendekatan yang dipakai dalam contoh ini menjadi dasar untuk menghitung jumlah grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^r}$, di mana p adalah bilangan prima. Pertama, diamati untuk kasus paling sederhana, yaitu ketika grup-grup faktor tersebut mempunyai orde relatif prima dan perkalian dari pangkat bilangan prima yang sama. Akhirnya, hasil tersebut diperluas untuk hasil kali langsung dari grup siklik dantak-siklik sebarang.

3.1 Menghitung Grup Bagian dari $Z_m \times Z_n$ bila m dan n Relatif Prima

Teorema 2. Bila m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima, maka grup Z_m dan Z_n tidak mempunyai kuosien tak-trivial yang isomorfis.

Bukti. Andaikan Z_m dan Z_n mempunyai kuosien tak-trivial yang isomorfis, yaitu $A/B \approx C/D$, di mana A/B adalah kuosien tak trivial dari Z_m dan C/D adalah kuosien tak trivial dari Z_n . Karena A/B dan C/D tak trivial dan m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima, maka $|A/B| = |C/D| = k$. Misal $|A/B| = |C/D| = k$ maka dengan Teorema Lagrange diperoleh:

$$|A/B| = \frac{|A|}{|B|} = k \Leftrightarrow |A| = k|B|$$

dan

$$|C/D| = \frac{|C|}{|D|} = k \Leftrightarrow |C| = k|D|.$$

Berarti k membagi $|A|$ sedangkan k membagi Z_m . Akibatnya k membagi m . Dan k membagi $|C|$ sedangkan k membagi Z_n . Akibatnya k membagi n . Karena k membagi m dan k membagi n , akibatnya k

membagi $\text{fpb}(m,n)=1$ Jadi $k=1$, yang berarti muncul kontradiksi.

Menurut Teorema Goursat, setiap grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ berpadanan dengan suatu tripel $(A/A, C/C, \varphi)$, di mana $A < Z_m$, $C < Z_n$, dan φ adalah isomorfisma identitas. Ini berarti bahwa setiap grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ mempunyai bentuk $A \times C$, dan dari sini kisi grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ adalah darab Kartesius dari Z_m dan Z_n .

Teorema 3. Misal m dan n adalah dua bilangan bulat positif yang relatif prima, dengan faktorisasi prima $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = q_1^{t_1} \dots q_l^{t_l}$. Maka banyaknya grup bagian dari adalah

$$d(m)d(n) = \prod_{i=1}^k (r_i + 1) \prod_{j=1}^l (t_j + 1).$$

Bukti. Karena setiap grup bagian dari Z_m berbentuk Z_a , di mana a membagi n . Dengan kata lain, $|L(Z_m)| = d(n)$, di mana $d(n)$ adalah banyaknya pembagi dari n . Hasil utama dari bagian ini adalah berdasar fakta bahwa bila faktorisasi prima dari bilangan bulat positif m adalah $p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$, maka banyaknya pembagi dari m adalah

$$d(m) = \prod_{i=1}^k (r_i + 1).$$

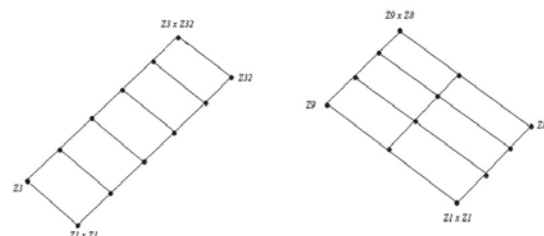
Akibatnya, banyaknya grup bagian dari $Z_m \times Z_n$, yaitu

$$|L(Z_m \times Z_n)| = d(m)d(n) = \prod_{i=1}^k (r_i + 1) \prod_{j=1}^l (t_j + 1)$$

Berikut ini adalah kasus khusus dari Teorema 3 bila m dan n berupa pangkat dari bilangan-bilangan prima.

Teorema 4. Bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka banyaknya grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{q^t}$ adalah $(r+1)(t+1)$.

Bukti. Merupakan akibat langsung dari Teorema 3 dengan $m=p^r$ dan $n=q^t$.



Gambar 3. Kisi Grup Bagian dari $Z_3 \times Z_{32}$ dan $Z_9 \times Z_8$

Contoh 2. Grup $Z_{27} \times Z_4$ dan $Z_9 \times Z_8$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian dan kisi grup bagiannya saling isomorfis. Meskipun kisi grup bagian

dari $Z_3 \times Z_{32}$ tidak isomorfis dengan kedua kisi tersebut, grup ini juga mempunyai 12 grup bagian. (Gambar 3). Secara umum, bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka grup $Z_p \times Z_{q^s}$ dan $Z_{p^2} \times Z_{q^3}$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian, namun kisi grup bagiannya tidak isomorfis. (Lampiran 2)

3.2 Menghitung Grup Bagian

dari $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$, dimana p adalah Bilangan Prima dan $r \leq s$

Dalam bagian ini kita mengamati secara khusus darab langsung $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$, di mana p adalah bilangan prima dan $r \leq s$. Tujuan utamanya adalah menghitung grup-grup bagian yang berpadanan dengan triple $(A/B, C/D, \varphi)$ untuk kuosien-kuosien tertentu A/B dan C/D , yang keduanya isomorfis dengan Z_{p^k} , $0 \leq k \leq r$, di mana φ mencakup semua automorfisma dari Z_{p^k} .

Karena LZ_{p^r} adalah rantai, mempunyai $r+1$ grup bagian (kuosien berorde 1), r kuosien berorde p , $r-1$ kuosien berorde p^2 , dan seterusnya. Secara umum, Z_{p^r} mempunyai $r-k+1$ kuosien berorde p^k , $0 \leq k \leq r$. Selanjutnya, menghitung automorfisma dari suatu grup siklis adalah ekuivalen dengan menghitung banyaknya pembangun. Dengan menggunakan fungsi totient Euler pada p^k , diperoleh bahwa Z_{p^k} mempunyai $p^k - p^{k-1}$ automorfisma bila $k > 0$, dan mempunyai satu automorfisma bila $k = 0$.

Sekarang, untuk setiap kuosien berorde p^k , $k > 0$, kita dapat memilih kuosien dalam Z_{p^r} dalam $r-k+1$ xara, memilih kuosien dalam Z_{p^s} dalam $s-k+1$ xara, dan kemudian memilih isomorphism dalam $p^k - p^{k-1}$ cara. Untuk $k=0$, banyaknya grup bagian adalah $(r+1)(s+1)$, dan untuk $0 < k \leq r$, banyaknya grup bagian adalah $(r-k+1)(s-k+1)(p^k - p^{k-1})$. Maka, total jumlah grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$ adalah

$$(r+1)(s+1) + \sum_{k=1}^r (r-k+1)(s-k+1)(p^k - p^{k-1}),$$

yang dapat dijelaskan dengan beberapa langkah berikut:

$$\begin{aligned} |L(Z_{p^r} \times Z_{p^s})| &= (r+1)(s+1) + \sum_{k=1}^r (r-k+1)(s-k+1)(p^k - p^{k-1}) \\ &= (r+1)(s+1) + \sum_{k=1}^r (r-k+1)(s-k+1)p^k \\ &\quad - (r+1)(s+1) + \sum_{k=1}^r (r-k+1)(s-k+1)p^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^r (r-k+1)(s-k+1)p^k - \sum_{k=0}^r (r-k)(s-k)p^k \\ &= \sum_{k=0}^r [(r-k+1)(s-k+1) - (r-k)(s-k)]p^k \\ &= \sum_{k=0}^r [(r-k)(s-k) + (r+s+1) - 2k - (r-k)(s-k)]p^k \\ &= \sum_{k=0}^r [(r+s+1) - 2k]p^k \\ &= (r+s+1) \sum_{k=0}^r p^k - 2 \sum_{k=1}^r kp^k \end{aligned} \quad (6)$$

Jumlahan yang pertama adalah deret geometrik berhingga,

$$\sum_{k=0}^r p^k = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1} \dots$$

Jumlahan yang kedua dapat dihitung dengan lebih dulu mengamati bahwa

$$\begin{aligned} (p-1) \sum_{k=1}^r kp^k &= \left(p \sum_{k=1}^r kp^k \right) - \left(\sum_{k=1}^r kp^k \right) \\ &= \left(rp^{r+1} + p \sum_{k=1}^{r-1} kp^k \right) - \left(p + p \sum_{k=1}^{r-1} (k+1)p^k \right) \\ &= rp^{r+1} - p + p \left(\sum_{k=1}^{r-1} kp^k - \sum_{k=1}^{r-1} (k+1)p^k \right) \\ &= rp^{r+1} - p + p \sum_{k=1}^{r-1} [kp^k - (k+1)p^k] \\ &= rp^{r+1} - p \sum_{k=0}^{r-1} p^k \\ &= rp^{r+1} - p \left(\frac{p^r - 1}{p - 1} \right) \end{aligned}$$

dan kemudian dengan membagi dengan $p-1$ diperoleh

$$\sum_{k=1}^r kp^k = \frac{rp^{r+1}}{p-1} - \frac{p^{r+1} - p}{(p-1)^2}.$$

Selelah mensubstitusikan ke (6) diperoleh

$$\begin{aligned} |LZ_{p^r} \times Z_{p^s}| &= (r+s+1) \left(\frac{p^{r+1} - 1}{p - 1} \right) - 2 \left(\frac{rp^{r+1}}{p-1} - \frac{p^{r+1} - p}{(p-1)^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan beberapa penyederhanaan diperoleh hasil sebagai berikut:

Teorema 5. Bila p adalah bilangan prima, dan r dan s adalah bilangan bulat tak-negatif sedemikian hingga $r \leq s$, maka banyaknya grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$ adalah

$$\frac{p^{r+1}[(s-r+1)(p-1)+2] - [(s-r+3)(p-1)+2]}{(p-1)^2}.$$

Bukti. Dari uraian dalam paragraf di atas dan beberapa substitusi aljabar diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} |L Z_{p^r} \times Z_{p^s}| &= \\ (r+s+1) \left(\frac{p^{r+1}-1}{p-1} \right) - 2 \left(\frac{rp^{r+1}}{p-1} - \frac{p^{r+1}-p}{(p-1)^2} \right) \\ &= \frac{(r+s+1)(p-1)(p^{r+1}-1)}{(p-1)^2} \\ &\quad - \frac{2r(p-1)p^{r+1}}{(p-1)^2} + 2 \frac{(p^{r+1}-p)}{(p-1)^2} \\ &= \frac{(r+s+1)(p-1)p^{r+1} - 2r(p-1)p^{r+1} + 2p^{r+1}}{(p-1)^2} \\ &\quad - \frac{(r+s+1)p + (r+s+1) - 2p}{(p-1)^2} \\ &= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+1+2)p}{(p-1)^2} \\ &\quad + (r+s+1) \\ &= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+3)p}{(p-1)^2} \\ &\quad + (r+s+1) \\ &= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - (r+s+3)p}{(p-1)^2} \\ &\quad + (r+s+3) - 2 \\ &= \frac{((s-r+1)(p-1)+2)p^{r+1} - [(r+s+3)(p-1)+2]}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

3.3 Jumlah Grup Bagian dari $Z_m \times Z_n$ untuk Sebarang m dan n

Perhatikan grup $Z_m \times Z_n$ dan andaikan bahwa $m \neq 1 \neq n$. Bila $p_1, p_2, \dots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima yang saling berbeda dan membagi hasil kali mn , maka m dan n dapat difaktorkan sebagai $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, di mana r_i dan s_i adalah bilangan bulat tak negatif dan mungkin sama dengan nol pada paling banyak satu dalam dekomposisi untuk m dan n . Dengan Teorema Fundamental dari grup Abel berhingga $Z_m \times Z_n$ dapat didekomposisikan menjadi

$$Z_m \times Z_n \cong (Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_1^{s_1}}) \times \dots \times (Z_{p_k^{r_k}} \times Z_{p_k^{s_k}}). \quad (7)$$

Pada tahun 1951, Suzuki [6] membuktikan teorema yang dapat digunakan untuk menghasilkan generalisasi Teorema 3.

Teorema 6 (Teorema Suzuki). Misal G_1 dan G_2 adalah grup berhingga. Maka $L(G_1 \times G_2) = L(G_1) \times L(G_2)$ dan $|L(G_1 \times G_2)| = |L(G_1)| \cdot |L(G_2)|$ bila dan hanya bila $|L(G_1)|$ dan $|L(G_2)|$ relatif prima.

Teorema 7. Misal m dan n adalah bilangan bulat positif, dan misal $p_1, p_2, \dots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima saling berbeda yang membagi hasil kali mn sedemikian hingga $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$. Maka

$$|L(Z_m \times Z_n)| = \prod_{i=1}^k |L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}})|.$$

Bukti. Dengan menerapkan Teorema Suzuki secara induktif ke persamaan (7).

Pangkal induksi, misal $m = p_1^{r_1}$ dan $n = p_1^{s_1}$,

$$\text{maka } |L(Z_m \times Z_n)| = |L(Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_1^{s_1}})|$$

Langkah induksi

Andaikan untuk $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$ berlaku

$$|L(Z_m \times Z_n)| = \prod_{i=1}^k |L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}})|$$

Akan dibuktikan jika $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k+1}^{r_{k+1}}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_{k+1}^{s_{k+1}}$, maka

$$|L(Z_m \times Z_n)| = \prod_{i=1}^{k+1} |L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}})|$$

Misal $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, maka $|L(Z_m \times Z_n)|$

$$\begin{aligned}
 &= |L((Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_1^{s_1}}) \times (Z_{p_2^{r_2}} \times Z_{p_2^{s_2}}) \\
 &\quad \times \dots \times (Z_{p_k^{r_k}} \times Z_{p_k^{s_k}}) \times (Z_{p_{k+1}^{r_{k+1}}} \times Z_{p_{k+1}^{s_{k+1}}})| \\
 &= |L((Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_1^{s_1}}) \times (Z_{p_2^{r_2}} \times Z_{p_2^{s_2}}) \\
 &\quad \times \dots \times (Z_{p_k^{r_k}} \times Z_{p_k^{s_k}})) \parallel L(Z_{p_{k+1}^{r_{k+1}}} \times Z_{p_{k+1}^{s_{k+1}}})| \\
 &= |L(Z_{p_1^{r_1} p_1^{s_1} \dots p_k^{r_k} p_k^{s_k}} \times Z_{p_1^{r_1} p_1^{s_1} \dots p_k^{r_k} p_k^{s_k}})| \\
 &\quad |L(Z_{p_{k+1}^{r_{k+1}} p_{k+1}^{s_{k+1}}})|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\prod_{i=1}^k |L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}})| \right) (|L(Z_{p_{k+1}^{r_{k+1}}} \times Z_{p_{k+1}^{s_{k+1}}})|) \\
 &= \prod_{i=1}^{k+1} |L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}})|
 \end{aligned}$$

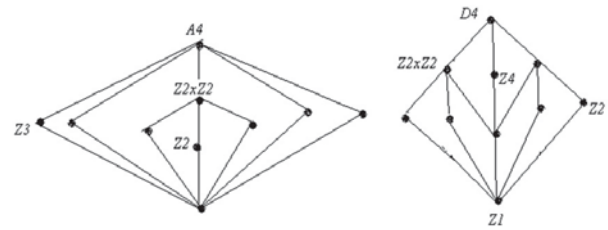
Setiap faktor dalam Teorema 7 dapat dihitung menggunakan Teorema 5.

Contoh 3. Karena $18=2.3^2$ dan $30 = 2.3.5$, maka $|L(Z_{18} \times Z_{30})| = |L(Z_2 \times Z_2)| \cdot |L(Z_3 \times Z_3)| \cdot |L(Z_5 \times Z_5)| = 5.10.2 = 100$.

3.4 Menghitung Jumlah Grup Bagian dari Grup Berhingga Tak Siklik

Secara prinsip, untuk menghitung grup bagian dari hasil kali langsung dari sebarang grup berhingga G_1 dan G_2 adalah dengan Teorema Goursat, yang tentunya dibutuhkan informasi lebih tentang struktur dari G_1 dan G_2 . Dalam prakteknya, untuk menghitung grup bagian dari $G_1 \times G_2$ pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat secara langsung daripada dengan rumus. Berikut adalah contohnya.

Contoh 4. Akan dihitung jumlah grup bagian dari hasil kali langsung A_4 , grup alternating pada empat elemen, dan D_4 , grup simetri dari persegi (Diagram Hassanya di Gambar 4). Orde dari A_4 adalah 12 yang mempunyai pembagi 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Karena A_4 tidak mempunyai kuosien berorde 6 dan D_4 tidak mempunyai kuosien berorde 3 maupun 12, berarti cukup diperhatikan kuosien berorde 1, 2, dan 4. (Lampiran 3)



Gambar 4. Diagram Hasse dari A_4 dan D_4

Kuosien berorde 1. A_4 dan D_4 masing-masing mempunyai 10 kuosien berorde satu (yaitu dari sepuluh grup bagian), dan hanya ada satu automorfisma antara setiap pasang kuosien-kuosien tersebut. Dengan demikian, total jumlah grup bagian yang bersesuaian dengan kuosien berorde satu adalah $10.10.1=100$.

Kuosien berorde 2. A_4 mempunyai 6 kuosien berorde dua, sedangkan D_4 mempunyai limabelas (Lampiran 3). Semua kuosien tersebut isomorfis dengan Z_2 , yang hanya mempunyai satu automorfisma. Dengan demikian, ada $6 \cdot 15 \cdot 1 = 90$ grup bagian.

Kuosien berorde 4. A_4 mempunyai 1 kuosien berorde empat (Lampiran 3) yang isomorfis dengan grup 4-Klein $Z_2 \times Z_2$. (Bila Z_3 adalah sebarang grup bagian berorde 3 dalam A_4 , maka A_4/Z_3 bukan kuosien karena Z_3 bukan grup bagian normal dari A_4). Di lain pihak, D_4 mempunyai 4 kuosien berorde empat, tapi salah satunya siklik, jadi mempunyai 3 kuosien yang isomorfis dengan grup 4-Klein. Karena $\text{Aut}(Z_2 \times Z_2) \approx S_3$, grup simetris pada 3 elemen, $Z_2 \times Z_2$ mempunyai 6 automorfisma, yang berarti jumlah total grup bagian dari $A_4 \times D_4$ yang bersesuaian dengan kuosien ini adalah $1.3.6=18$.

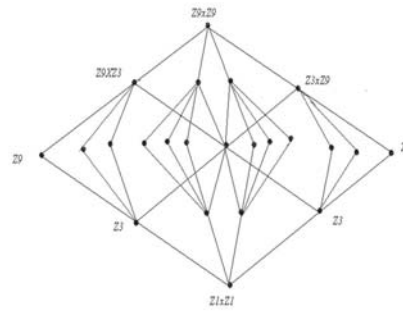
Berdasar pengamatan di atas $A_4 \times D_4$ mempunyai $100+90+18=208$ grup bagian.

4. KESIMPULAN

Dari uraian di atas diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup siklis berhingga, yaitu:

1. Teorema 3 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya relatif prima.
2. Teorema 4 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan prima yang berbeda.

3. Teorema 5 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya merupakan pangkat dari bilangan prima yang sama.
4. Teorema 7 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan bulat positif sebarang.
5. Untuk darab langsung dari dua grup tak siklis pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat.
6. Selain itu, dari penelitian ini ditemukan ketidaksesuaian antara diagram kisi untuk grup bagian dari $Z_9 \times Z_9$ yaitu Gambar 2 dengan yang ada di paper Joseph Petrillo dalam [5], yaitu:



Gambar 5. Diagram Kisi untuk Grup Bagian dari Dalam Paper Joseph Petrillo

DAFTAR PUSTAKA

- Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*, 7th edition. Pearson Education, Inc.
- Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra*. 7th edition. Boston: Houghton Mifflin.
- Herawati, A. 2009. "Teorema Goursat: Konstruksi Subgrup dari Grup Darab Langsung". *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, UNY: FMIPA.
- Petrillo, J. 2009. "Goursat's Other Theorem". *The College Mathematics Journal*, Vol.40, No.2 (2009) 119.
- Petrillo, J. 2011. "Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups". *The College Mathematics Journal*, Vol.42, No.3 (2011) 215.
- Suzuki, M. 1951. "On the Lattice of Subgroups of Finite Groups". *Transactions of The American Mathematical Society*, 70 (1951) 345-371.